**1** **Factoriza los siguientes polinomios señalando sus raíces:**

**a)** $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

**b)** $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

***Resolución***

a) $P(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$

Aplicamos Ruffini:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | 1 | –4 | –4 |
| –1 | | –1 | 0 | 4 |
| | 1 | 0 | –4 | 0 |
| 2 | | 2 | 4 | |
| | 1 | 2 | 0 | |
| –2 | | –2 | | |
| | 1 | 0 | | |

$P(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$

Las raíces de $P(x)$ son $-2$, $-1$ y $2$.

b) $Q(x) = 2x^3 - x^2 - x$

Sacando factor común: $Q(x) = x(2x^2 - x - 1)$

Aplicando la fórmula para resolver ecuaciones de 2.º grado a $2x^2 - x - 1$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \quad \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = 1 \end{cases} \qquad Q(x) = 2x(x - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

Las raíces de $Q(x)$ son $-\frac{1}{2}$, $0$ y $1$.

**2** **Opera y simplifica el resultado:**

**a)** $\dfrac{(x + 5)^2 - 2x(x + 5)}{(x + 5)^4}$

**b)** $\left(\dfrac{x + 1}{x} - \dfrac{x}{x + 2}\right) : \left(1 + \dfrac{x}{x + 2}\right)$

***Resolución***

a) $$\frac{(x + 5)^2 - 2x(x + 5)}{(x + 5)^4} = \frac{(x + 5) - 2x}{(x + 5)^3} = \frac{5 - x}{(x + 5)^3}$$

b) $$\left(\frac{x + 1}{x} - \frac{x}{x + 2}\right) : \left(1 + \frac{x}{x + 2}\right) = \left(\frac{(x + 1)(x + 2) - x^2}{x(x + 2)}\right) : \left(\frac{x + 2 + x}{x + 2}\right) = \left(\frac{x^2 + 3x + 2 - x^2}{x(x + 2)}\right) : \left(\frac{2x + 2}{x + 2}\right) =$$

$$= \left(\frac{3x + 2}{x(x + 2)}\right) \cdot \left(\frac{x + 2}{2x + 2}\right) = \frac{3x + 2}{x(2x + 2)} = \frac{3x + 2}{2x^2 + 2x}$$

**3** **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

**a)** $\frac{3x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2} = \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+2}{3}$

**b)** $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$

**c)** $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x$

**d)** $\frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{x^2-3}{(x+1)(x-3)}$

***Resolución***

a) $\frac{3x+1}{3} - \frac{5x^2+3}{2} = \frac{x^2-1}{2} - \frac{x+2}{3}$

Multiplicando por mín.c.m.(2, 3) = 6 $\to$ $2(3x+1) - 3(5x^2+3) = 3(x^2-1) - 2(x+2) \to$

$\to 6x + 2 - 15x^2 - 9 = 3x^2 - 3 - 2x - 4 \to -15x^2 + 6x - 7 = 3x^2 - 2x - 7 \to$

$\to 18x^2 - 8x = 0 \to 2x(9x-4) = 0 \left\langle \begin{array}{l} 2x = 0 \to x_1 = 0 \\ 9x - 4 = 0 \to x_2 = \frac{4}{9} \end{array} \right.$

b) $x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \xrightarrow{x^2 = y} y^2 - 8y - 9 = 0$

$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot (-9) \cdot (1)}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} \left\langle \begin{array}{l} y = 9 \to x^2 = 9 \to x = \pm 3 \\ y = -1 \ \text{(no vale)} \end{array} \right.$

c) $x - \sqrt{2x-1} = 1 - x \to (2x-1)^2 = (\sqrt{2x-1})^2 \to 4x^2 - 4x + 1 = 2x - 1 \to$

$\to 4x^2 - 6x + 2 = 0 \to 2x^2 - 3x + 1 = 0$

$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot (2) \cdot (1)}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{array} \right\}$ (Son válidas ambas soluciones.)

d) $\frac{x}{x-3} - \frac{x+3}{x+1} = \frac{x^2-3}{(x+1)(x-3)} \to (x+1) \cdot x - (x-3)(x+3) = x^2 - 3 \to x^2 + x - (x^2 - 9) = x^2 - 3 \to$

$\to x^2 + x - x^2 + 9 = x^2 - 3 \to x + 9 = x^2 - 3 \to x^2 - x - 12 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (1) \cdot (-12)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = -3 \end{array} \right.$

**4** **Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:**

**a)** $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9$

**b)** $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x}$

***Resolución***

a) $3^{x^2} \cdot 3^{-2} = 9 \to 3^{x^2-2} = 3^2 \to x^2 - 2 = 2 \to x^2 = 4 \to x = \pm 2$

b) $5^{x^2} \cdot 25^{x-1} = 5^{3x} \to 5^{x^2} \cdot (5^2)^{x-1} = 5^{3x} \to 5^{x^2} \cdot 5^{2x-2} = 5^{3x} \to 5^{x^2+2x-2} = 5^{3x} \to$

$\to x^2 + 2x - 2 = 3x \to x^2 - x - 2 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (1) \cdot (-2)}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{array} \right.$

**5** **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

**a)** $\begin{cases} xy = -2 \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$

***Resolución***

a) $\begin{cases} xy = -2 & \rightarrow \ x = -\dfrac{2}{y} \\ 3x + 2y = -1 \end{cases}$

$$3\left(-\frac{2}{y}\right) + 2y = -1 \ \rightarrow \ -\frac{6}{y} + 2y = -1 \ \rightarrow \ -6 + 2y^2 = -y \ \rightarrow \ 2y^2 + y - 6 = 0$$

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (2) \cdot (-6)}}{4} = \frac{-1 \pm 7}{4} \begin{cases} y_1 = \dfrac{3}{2} \ \rightarrow \ x_1 = -\dfrac{4}{3} \\ y_2 = -2 \ \rightarrow \ x_2 = 1 \end{cases}$$

Hay dos pares de *soluciones:*

$x_1 = -\dfrac{4}{3}; \ y_1 = \dfrac{3}{2}$ $\qquad x_2 = 1; \ y_2 = -2$

b) $\begin{cases} \sqrt{-2x} + y = -1 \\ x - 2y = 4 & \rightarrow \ x = 4 + 2y \end{cases}$

$$\sqrt{-2(4 + 2y)} + y = -1 \ \rightarrow \ \left(\sqrt{-8 - 4y}\right)^2 = (-1 - y)^2 \ \rightarrow \ -8 - 4y = 1 + 2y + y^2 \ \rightarrow \ y^2 + 6y + 9 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot (1) \cdot (9)}}{2} = \frac{-6}{2} \ \rightarrow \ y = -3$$

$$x = 4 + 2(-3) \ \rightarrow \ x = -2$$

*Solución:* $x = -2; \ y = -3$

**6** **Resuelve por el método de Gauss:**

**a)** $\begin{cases} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{cases}$

***Resolución***

a) $$\left.\begin{cases} 3x - 5y + z = 11 \\ x + 2y - 3z = -10 \\ x + y - 2z = -6 \end{cases}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{1.^a - 3 \cdot 3.^a} \\ \xrightarrow{2.^a - 3.^a} \\ \xrightarrow{3.^a} \end{matrix} \left.\begin{matrix} -8y + 7z = 29 \\ y - z = -4 \\ x + y - 2z = -6 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{1.^a + 8 \cdot 2.^a} \\ \xrightarrow{2.^a} \\ \xrightarrow{3.^a} \end{matrix} \left.\begin{matrix} -z = -3 \\ y - z = -4 \\ x + y - 2z = -6 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \rightarrow z = 3 \\ \rightarrow y = -1 \\ \rightarrow x = 1 \end{matrix}$$

*Solución:* $x = 1; \ y = -1; \ z = 3$

b) $$\left.\begin{cases} x - 5y + 9z = 4 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ x + 17y - 33z = 0 \end{cases}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{1.^a} \\ \xrightarrow{2.^a - 2 \cdot 1.^a} \\ \xrightarrow{3.^a - 1.^a} \end{matrix} \left.\begin{matrix} x - 5y + 9z = 4 \\ 11y - 21z = -6 \\ 22y - 42z = -4 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \xrightarrow{1.^a} \\ \xrightarrow{2.^a} \\ \xrightarrow{3.^a - 2 \cdot 2.^a} \end{matrix} \begin{matrix} x - 5y + 9z = 4 \\ 11y - 21z = -6 \\ 0 = 8 \end{matrix}$$

El sistema no tiene solución.

**7** **Resuelve:**

**a)** $x^2 + 5x \geq 0$

**b)** $x^2 - 25 < 0$

**c)** $\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \\ x + 1 \leq 8 \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$

***Resolución***

a) $x^2 + 5x \geq 0 \;\rightarrow\; x(x + 5) \geq 0$

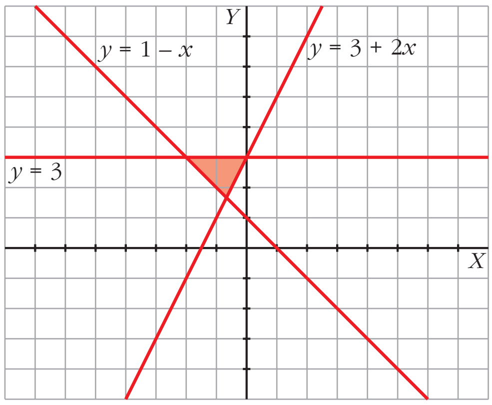
Las raíces de $x(x + 5) = 0$ son 0 y –5:


$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } x = -6 \;\rightarrow\; -6(-6 + 5) > 0 \\ \text{Si } x = -1 \;\rightarrow\; -1(-1 + 5) < 0 \\ \text{Si } x = 1 \;\rightarrow\; 1(1 + 5) > 0 \end{array}\right\} \textit{Solución: } (-\infty, -5] \cup [0, +\infty)$$

b) $x^2 - 25 < 0 \;\rightarrow\; x^2 < 25 \;\rightarrow\; -5 < x < 5 \;\rightarrow$ *Solución:* $(-5, 5)$

c) $\left.\begin{cases} 2x + 1 \geq 7 \;\rightarrow\; 2x \geq 6 \;\rightarrow\; x \geq 3 \\ x + 1 \leq 8 \;\rightarrow\; x \leq 7 \end{cases}\right\}$ *Solución:* $[3, 7]$

d) $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ y - 2x \geq 3 \\ y \leq 3 \end{cases}$ La solución es el recinto sombreado:




**8** **Un tendero invierte 125 € en la compra de una partida de manzanas. Desecha 20 kilos por defectuosas y vende el resto, aumentando 0,40 € cada kilo sobre el precio de compra, por 147 €. ¿Cuántos kilos compró?**

***Resolución***

Llamamos $x$ al número de kilos que compró el tendero.

Llamamos $y$ al precio al que compra cada kilo de manzanas.

$$\begin{cases} x \cdot y = 125 \\ (x - 20)(y + 0{,}4) = 147 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema (nos quedamos solo con la solución positiva):

$x = 125, \;\; y = 1$

Por tanto, el tendero compró 125 kg.