1 **Calcula los límites de la función** $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ **en** $x = 0$, $x = 3$ **y** $x = 5$.

Explica si la función es continua en $x = 3$.

Resolución

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (2x - 5) = -5$
- $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (2x - 5) = 1$

  $\lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^+} (x^2 - x - 7) = -1$

  No existe el límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3.
- $\lim\limits_{x \to 5} f(x) = \lim\limits_{x \to 5} (x^2 - x - 7) = 13$
- La función no es continua en $x = 3$, porque no existe el límite de la función en ese punto.

2 **Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2}$

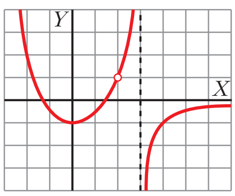
Resolución

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

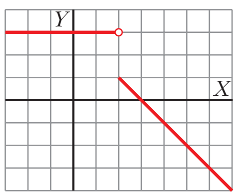
b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos.)

3 a)



b)



Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Resolución

a) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\}$ No tiene límite en $x = 3$.

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{cases}$ No tiene límite en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4 **Calcula el valor que debe tomar a para que la función $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x < 1 \\ 4x - a, & x \geq 1 \end{cases}$ sea continua en $x = 1$. ¿Puede ser discontinua en otro punto?**

Resolución

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, debe cumplir que: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

Veamos:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3x - 5) = -2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (4x - a) = 4 - a$$

Como deben coincidir:

$$-2 = 4 - a \rightarrow a = 6$$

Por tanto, $f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & \text{si } x < 1 \\ 4x - 6, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

No puede ser discontinua en ningún otro punto, por estar definida mediante funciones polinómicas.

5 **Justifica qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Resolución

$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{cases}$

Para que exista el límite, debe ser:

$a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

6 **Halla las asíntotas de la función** $y = \dfrac{2x+1}{4-x}$ **y estudia la posición de la curva respecto a ellas.**

Resolución

- Asíntota vertical:

  $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$

  $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = -\infty$

  Así, $x = 4$ es una asíntota vertical.

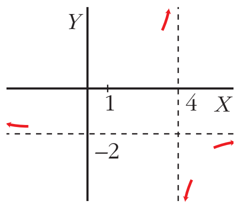
- Asíntota horizontal:

  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -2 \ \rightarrow \ y = -2$

  Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) < 0 \ \rightarrow$ la curva está por debajo de la asíntota.

  Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) > 0 \ \rightarrow$ la curva está por encima de la asíntota.

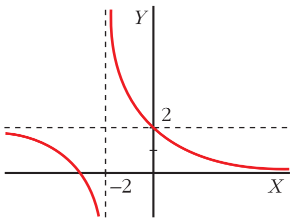
- No tiene asíntotas oblicuas.



7 **Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:**

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Resolución



8 **Estudia las ramas infinitas de la función** $y = \dfrac{x^3}{x+3}$ **y representa la información que obtengas.**

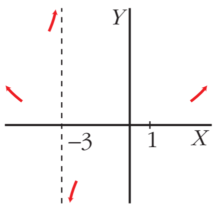
Resolución

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{x^3}{x+3} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{x^3}{x+3} = -\infty$$



9 **¿Cuál de las siguientes funciones tiene una asíntota oblicua? Hállala y sitúa la curva respecto a ella:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ **b)** $y = \dfrac{x^3+2}{x^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$

Resolución

La única que tiene asíntota oblicua es la función b) $y = \dfrac{x^3+2}{x^2}$.

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 2 & x^2 \\ \cline{2-2} -x^3 & x \\ \hline 2 & \end{array}$$

$$y = \frac{x^3+2}{x^2} = x + \frac{2}{x^2}$$

La asíntota es $y = x$. Como $\dfrac{2}{x^2} > 0$, la curva está por encima de la asíntota.