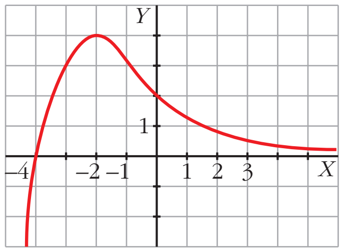
1 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.**



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

Resolución

a) $\text{T.V.M. } [0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$.

2 **Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.**

Resolución

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}$ **c)** $y = \left(\dfrac{3x - 5}{2}\right)^3$ **d)** $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$

Resolución

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{x}{3}(-1)e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{1-x}{3}\right)$

c) $f'(x) = 3\left(\frac{3x-5}{2}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2}\left(\frac{3x-5}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}(3x-5)^2$

d) $f'(x) = \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2-4x-x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{x^2-4x+4}$

4 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = \ln x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Resolución

Punto de tangencia: $x = 1$, $y = \ln 1^2 = 0 \;\rightarrow\; P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \;\rightarrow\; f'(1) = 2$

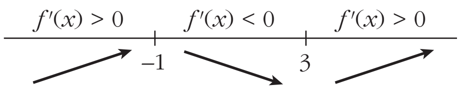
Ecuación: $y = 0 + 2(x-1) \;\rightarrow\; y = 2x - 2$

5 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.**

Resolución

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \;\rightarrow\; f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Buscamos los valores de x para los que $f'(x) > 0 \;\rightarrow\; x^2 - 2x - 3 > 0$

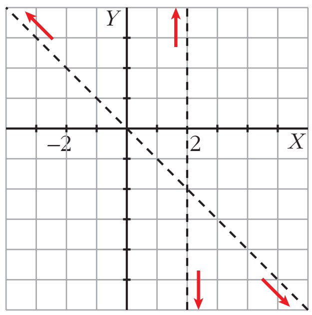


Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento de f: $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.

6 **Determina los puntos singulares de $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$ de la cual conocemos sus asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas. Represéntala.**



Resolución

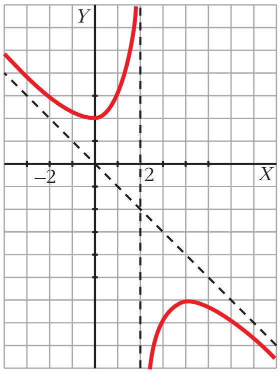
$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$

$f'(x) = \frac{(2x-2)(2-x) - (x^2-2x+4)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{(4x - 2x^2 - 4 + 2x) + (x^2 - 2x - 4)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2 + 4x}{(2-x)^2}$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ \frac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \ \rightarrow \ -x^2 + 4x = 0 \ \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{0 - 0 + 4}{2 - 0} = 2; \ f(4) = \frac{4^2 - 2 \cdot 4 + 4}{2 - 4} = -6$$

Los puntos singulares son (0, 2) y (4, –6). El primero es un mínimo y el segundo, un máximo.



7 **Representa la función $y = x^3 - 12x + 16$.**

Resolución

$y = x^3 - 12x + 16$ es una función polinómica, por ello es continua en $\mathbb{R}$.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

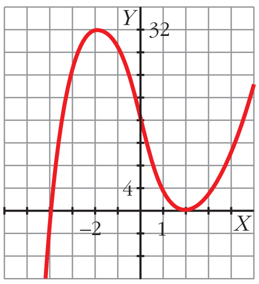
$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ 3x^2 - 12 = 0 \ \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0 \ \rightarrow \ (2, 0)$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \ \rightarrow \ (-2, 32)$$

Los puntos singulares son (2, 0) y (–2, 32).

Esta es su gráfica:



8 **Estudia y representa** $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$.

Resolución

$f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 1}$

- El dominio de esta función es $\mathbb{R}$.
- Asíntotas:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\} \; y = 0 \text{ es una asíntota horizontal.}$$

Cuando $x \to +\infty$, $f(x) > 0 \to$ la curva está por encima de la asíntota.

Cuando $x \to -\infty$, $f(x) < 0 \to$ la curva está por debajo de la asíntota.

- Cortes con los ejes:

$$f(x) = 0 \to 4x = 0 \to x = 0$$

La función corta a los ejes en el punto (0, 0).

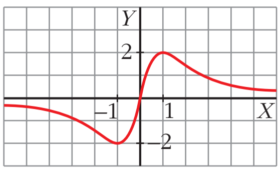
- Extremos relativos:

$$f'(x) = \frac{4(x^2 + 1) - 4x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-4x^2 + 4}{(x^2 + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \to -4x^2 + 4 = 0 \to x^2 = 1 \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Así, observando la asíntota y el corte con el eje X, (1, 2) es un máximo relativo, y (–1, –2), un mínimo relativo.

La gráfica es:



9 **La función** $f(x) = x^2 + bx + c$ **tiene un mínimo en** $x = 2$ **y pasa por (2, 2). Calcula** b **y** c.

Resolución

$f(x) = x^2 + bx + c$

$f'(x) = 2x + b$

- $x = 2$ es un mínimo:

$$f'(2) = 0 \to 2 \cdot 2 + b = 0 \to b = -4$$

- Pasa por (2, 2):

$$f(2) = 2 \to 2^2 - 4 \cdot 2 + c = 2 \to c = 6$$

Así, la función es $y = x^2 - 4x + 6$.