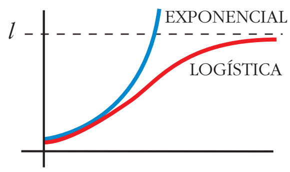
EL CRECIMIENTO DE UNA POBLACIÓN

La **función exponencial** es un modelo válido para crecimientos (o decrecimientos) continuos en los que las condiciones son siempre igualmente favorables: aumento del capital ingresado en un banco, desintegración de sustancias radiactivas…

Las poblaciones de seres vivos comienzan creciendo según una curva exponencial pero si no hay catástrofes, llegan a invadir su espacio vital y, debido a la limitación de alimentos, etc., su crecimiento se amortigua, no sobrepasando una población límite. Este tipo de aumento, amortiguado por un nivel de saturación, se llama crecimiento logístico. La **función logística**, describe mucho mejor que la exponencial lo que realmente ocurre con las poblaciones de seres vivos.

En general, la función logística asociada a una exponencial $y = C\,a^t$, donde C es la población inicial y t el tiempo, es:



$$y = l \cdot \frac{1}{1 + k\,a^{-t}}$$

l es la población límite, y

$k = (l/C) - 1$

UN CASO REAL: *En una isla dejamos escapar 10 conejos, especie desconocida hasta entonces en esos parajes. Supongamos que las condiciones para que se reproduzcan son óptimas, por lo que se incrementan en un 20% cada mes.*

La fórmula que nos da el número de conejos, N_1, en función del tiempo, t, expresado en meses, es: $N_1 = 10 \cdot 1{,}2^t$ (MODELO EXPONENCIAL)

Para $t = 0$, $N_1(0) = 10$ (los 10 conejos iniciales); para $t = 12$ meses, $N_1(12) = 10 \cdot 1{,}2^{12} = 89$

Y obtendríamos 795, 7 088, 63 197, 563 475 conejos 2, 3, 4 y 5 años después. El crecimiento es fantástico. Si la isla fuera enorme, esto sería posible, pero está claro que este aumento no puede proseguir indefinidamente.

Supongamos ahora que la isla tuviera un tamaño y unas condiciones tales que, a lo sumo, pueden vivir 100 000 conejos (población límite).

En este caso, la función que describe el crecimiento de la población es:

$$N_2 = 100\,000 \cdot \frac{1}{1 + 9\,999 \cdot 1{,}2^{-t}} \quad \text{(MODELO LOGÍSTICO)}$$

Comparemos el número de conejos que habría en la isla según cada modelo:

TIEMPO (meses)	N_1: MODELO EXPONENCIAL	N_2: MODELO LOGÍSTICO	DIFERENCIA $N_1 - N_2$
12	89	89	0
24	795	789	6
36	7 088	6 619	469
48	63 197	38 727	24 470
60	563 475	84 929	478 546

Durante los dos primeros años los números son casi idénticos y en el tercero muy parecidos: aún estaba lejos el nivel de saturación. Sin embargo, al cuarto año la diferencia es enorme y al quinto año no tienen nada que ver los resultados obtenidos mediante los dos modelos.

EJERCICIO

Dejamos mil moscas en una isla en la que no había ninguna y en la cual hay condiciones para que vivan, a lo sumo, 600 000. Cada día, el número de moscas aumenta el 2%.

a) Expresa el crecimiento según el modelo exponencial, como si no hubiera limitación.

b) Expresa el crecimiento según el modelo logístico.

c) Compara el número de moscas que habría a los 10, 100, 150, 200, 250, 300 y 400 días según cada modelo y razona sobre las diferencias observadas.