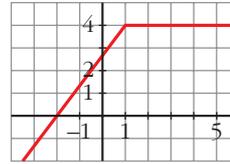




1 a) Escribe la expresión analítica de esta función.

b) Observa la gráfica y di el valor de los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$



Resolución

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x + 2), & x \leq 1 \\ 4, & x > 1 \end{cases}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 4; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 4$$

2 Representa las funciones:

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$

b) $y = \log_2(x + 3)$

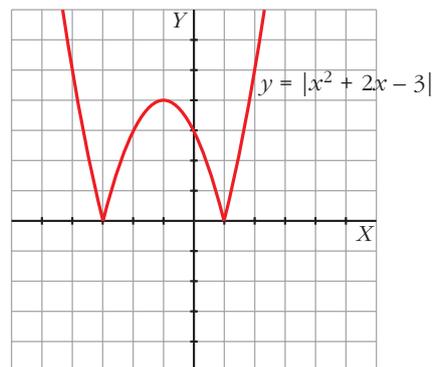
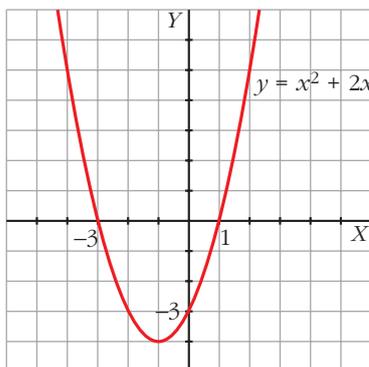
Resolución

a) $y = |x^2 + 2x - 3|$. Estudiamos la parábola $y = x^2 + 2x - 3$:

$$\text{Cortes con los ejes} \begin{cases} x = 0, & y = -3 \\ y = 0 \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 & \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vértice} \begin{cases} x = \frac{-2}{2} = -1 \\ y = (-1)^2 + 2(-1) - 3 = -4 \end{cases}$$

Su representación es:



Así, los valores positivos quedan igual, y para los negativos tomamos sus opuestos.

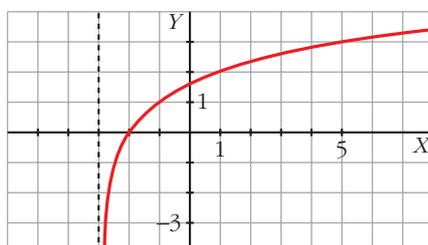
b) $y = \log_2(x + 3) \rightarrow \text{Dom} = (-3, +\infty)$

Hallamos algunos puntos

x	-2	-1	1	5
y	0	1	2	3

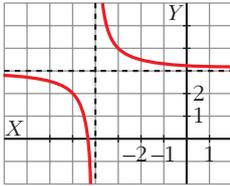
y vemos que: $\lim_{x \rightarrow -3^+} \log_2(x + 3) = -\infty$

Su gráfica es:





3



La expresión analítica de esta función es del tipo:

$$y = a + \frac{1}{x - b}$$

- ¿Cuáles son los valores de a y de b ?
- Di cuáles son sus asíntotas.
- ¿Es discontinua en algún punto?

Resolución

- $a = 3$; $b = -4$
- Asíntota vertical: $x = -4$
Asíntota horizontal: $y = 3$
- Es discontinua en $x = -4$, punto en el que no está definida la función.

4 Indica para qué valores de \mathbb{R} son continuas las siguientes funciones:

- $y = \ln(x - 2)$
- $y = \cos x$
- $y = \sqrt{-x}$

Resolución

- $(2, +\infty)$
- \mathbb{R}
- $(-\infty, 0]$

5 Halla la recta tangente a la curva $y = -x^2 + 5x$, que es paralela a la recta $x + y + 3 = 0$.

Resolución

Pendiente de $x + y + 3 = 0$: $m = -1$

El valor de la derivada en el punto de tangencia debe ser igual a -1 .

$$f(x) = -x^2 + 5x$$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x + 5 \rightarrow -2x + 5 = -1 \rightarrow x = 3 \\ f(3) = -3^2 + 5 \cdot 3 = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Punto de tangencia: } P(3, 6)$$

$$\text{Ecuación de la recta tangente buscada: } y = 6 - 1(x - 3) \rightarrow y = 9 - x$$

6 Halla los puntos singulares de $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$. Con ayuda de las ramas infinitas, di si son máximos o mínimos y representa la función.

Resolución

$$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5 \rightarrow f'(x) = -4x^3 + 16x \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow -4x^3 + 16x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 4x(-x^2 + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = -5 \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -16 + 32 - 5 = 11 \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = -16 + 32 - 5 = 11 \end{cases}$$

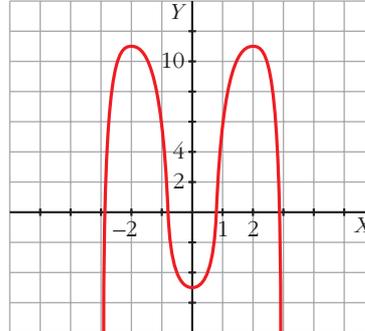


Los puntos singulares son $(0, -5)$, $(2, 11)$ y $(-2, 11)$.

$$\text{Ramas infinitas: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + 8x^2 - 5) = -\infty \end{cases}$$

Máximos: $(2, 11)$ y $(-2, 11)$

Mínimo: $(0, -5)$



7 Con las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = \sqrt{x}$ hemos obtenido, por composición, estas otras:

$$p(x) = e^{\sqrt{x}}; \quad q(x) = \sqrt{e^x}; \quad r(x) = \sqrt[4]{x}$$

Expresa las funciones p , q y r a partir de f y g .

Resolución

$$p(x) = (f \circ g)(x) \qquad q(x) = (g \circ f)(x) \qquad r(x) = (g \circ g)(x)$$

8 Calcula el límite de la función $f(x) = \frac{x^4 - x^3 - 6x^2}{x^3 - 6x^2 + 9x}$ en los siguientes casos:

- a) $x \rightarrow 3$ b) $x \rightarrow 0$ c) $x \rightarrow +\infty$ d) $x \rightarrow -\infty$

Resolución

$$f(x) = \frac{x^2(x-3)(x+2)}{x(x-3)^2} = \frac{x(x+2)}{x-3}$$

- a) $+\infty$ b) 0 c) $+\infty$ d) $-\infty$

9 En la función: $f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

- a) Calcula b para que tenga límite en $x = 2$.
b) Después de hallar b , explica si f es continua en $x = 2$.

Resolución

$$a) f(x) = \begin{cases} 3x - b & \text{si } x < 2 \\ 3 & \text{si } x = 2 \\ -2x + 9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Para que tenga límite en $x = 2$, debe cumplirse: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \cdot 2 - b = 6 - b \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -2 \cdot 2 + 9 = 5 \end{array} \right\} \rightarrow 6 - b = 5 \rightarrow b = 1$$



b) Para que sea continua en $x = 2$, debe ser $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$$

$$f(2) = 3$$

Como $f(2) \neq \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, f no es continua en $x = 2$.

10 Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

b) $f(x) = \left(\frac{2x-5}{x+1}\right)^2$

c) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2-1}{2x+3}\right)$

d) $f(x) = \sqrt{2x^2 + x - 1}$

e) $f(x) = e^{\sqrt{x}} \cdot \text{sen } x$

f) $f(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$

Resolución

a) $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{28x - 70}{(x + 1)^3}$

c) $f'(x) = \frac{2x^2 + 6x + 2}{(x^2 - 1)(2x + 3)}$

d) $f'(x) = \frac{4x + 1}{2\sqrt{2x^2 + x - 1}}$

e) $f'(x) = e^{\sqrt{x}} \left(\frac{\text{sen } x}{2\sqrt{x}} + \cos x \right)$

f) $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x} \sqrt{1 + \sqrt{x}}}$

11 Un capital de 3 500 € invertido en fondos de inversión, se supone que va a variar según la siguiente función:

$$C = 3,5 + 0,04t - 0,001t^2$$

donde t es el tiempo que dura la inversión, en meses, y C es su valor en ese instante, en miles de euros.

a) ¿En qué momento conviene sacar el capital para que su valor sea máximo?

b) Si no se hace a su debido tiempo, ¿en qué momento lo que queda es igual al capital inicial?

c) Si nos descuidáramos y dejáramos la inversión indefinidamente, ¿en qué momento nos quedaríamos sin nada?

Resolución

a) Será cuando se anule la derivada.

$$C(t) = 3,5 + 0,04t - 0,001t^2$$

$$C'(t) = 0,04 - 0,002t$$

$$C'(t) = 0 \rightarrow 0,04 - 0,002t = 0 \rightarrow t = \frac{0,04}{0,002} = 20 \text{ meses}$$

b) Nos pregunta para qué valor de $t \neq 0$ es $C(t) = 3,5$.

$$3,5 = 3,5 + 0,04t - 0,001t^2$$

$$0 = t(0,04 - 0,001t) \rightarrow t = \frac{0,04}{0,001} = 40 \text{ meses}$$

c) $C(t) = 0$

$$0 = 3,5 + 0,04t - 0,001t^2 \rightarrow t^2 - 40t - 3500 = 0 \rightarrow t = \frac{40 \pm \sqrt{(-40)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3500)}}{2} = 82,44 \text{ meses}$$

A partir de $t = 83$ meses, no tendríamos nada.



12 Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de las funciones siguientes:

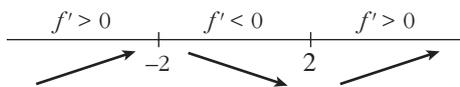
a) $y = x^3 - 12x$

b) $y = \frac{x^2 - 4}{x}$

Resolución

a) $f(x) = x^3 - 12x \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 12; 3x^2 - 12 = 0 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$

Estudiamos el signo de f' para saber dónde crece y dónde decrece la función:



f crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

f decrece en $(-2, 2)$.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot x - x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2 + 4}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{x^2 + 4}{x^2} = 0$ No tiene solución.

f' es positiva para cualquier valor de x . f es creciente en todo su dominio: $\mathbb{R} - \{0\}$

13 En la función $y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ estudia:

a) Las asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas.

b) Los máximos y los mínimos relativos.

c) Representa su gráfica.

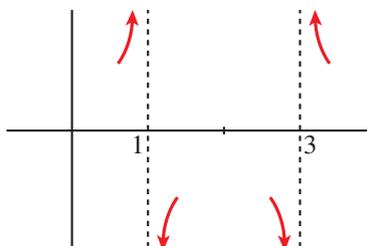
Resolución

$y = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$

a) • Asíntotas verticales: $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow x = 1, x = 3$

Posición de $x = 1$ $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \end{cases}$

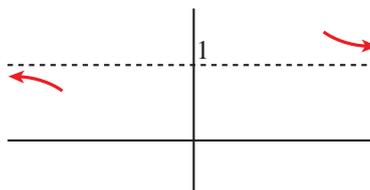
Posición de $x = 3$ $\begin{cases} x \rightarrow 3^- & f(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 3^+ & f(x) \rightarrow +\infty \end{cases}$



• Asíntota horizontal:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x + 3} = 1 \rightarrow y = 1$

Posición: $\begin{cases} x \rightarrow +\infty & f(x) > 1 \\ x \rightarrow -\infty & f(x) < 1 \end{cases}$

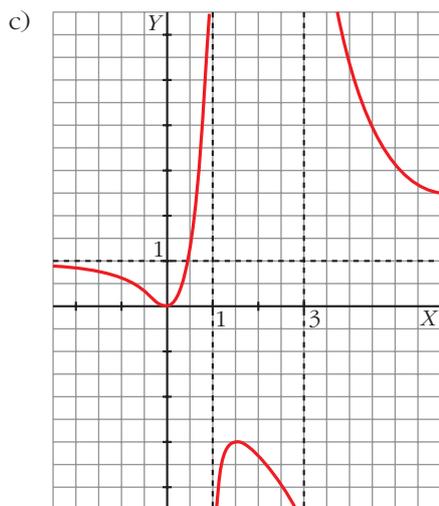




b) Máximos y mínimos:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^2 + 6x = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow P(0, 0) \text{ es mínimo relativo.} \\ x = \frac{3}{2} \rightarrow f\left(\frac{3}{2}\right) = -3 \rightarrow Q\left(\frac{3}{2}, -3\right) \text{ es máximo relativo.} \end{cases}$$



14 ¿Cuál de estas funciones tiene asíntota oblicua?

a) $y = \frac{2x^2 - x^3}{x - 1}$

b) $y = 1 + \frac{3}{x}$

c) $y = \frac{4 + 2x^2}{x}$

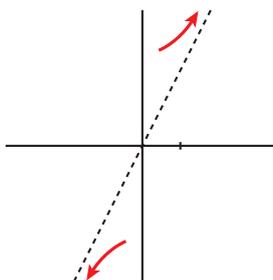
Hállala y sitúa la curva con respecto a ella.

Resolución

Tiene asíntota oblicua $y = \frac{4 + 2x^2}{x} = \frac{4}{x} + 2x$.

La asíntota es $y = 2x$.

Posición: $\begin{cases} x \rightarrow +\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \\ x \rightarrow -\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \end{cases}$



15 Calcula a y b de modo que la función $y = x^3 + ax + b$ tenga un punto singular en $(2, 1)$.

Resolución

Si $y = x^3 + ax + b$ tiene un punto singular en $(2, 1)$, la curva pasa por ese punto y su derivada es igual a 0 en él.

$$(2, 1) \in (x, f(x)) \rightarrow 1 = 2^3 + a \cdot 2 + b \rightarrow 2a + b = -7$$

$$f'(x) = 0 \text{ en } x = 2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + a \rightarrow 0 = 3 \cdot 2^2 + a \rightarrow 12 + a = 0$$

$$\begin{cases} 2a + b = -7 \\ 12 + a = 0 \end{cases} \rightarrow a = -12, b = 17$$

La función es $y = x^3 - 12x + 17$.