

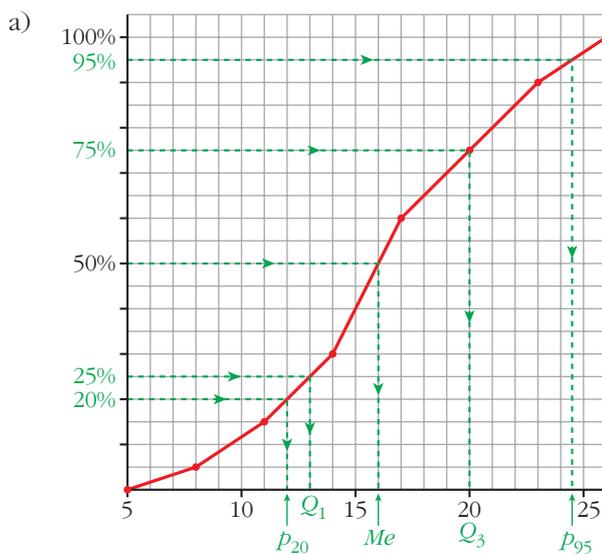


1 La gráfica es el polígono de porcentajes acumulados correspondiente a la distribución de las edades, en meses, de los niños de una guardería (repartidos en 7 intervalos de 3 en 3 meses).

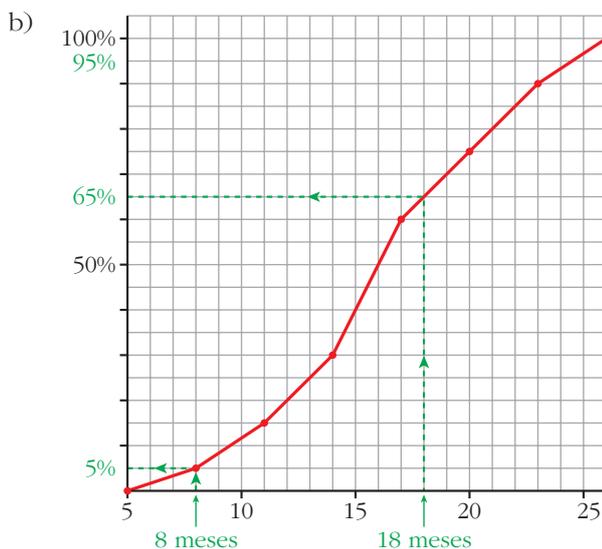
a) Trabajando sobre el gráfico, asigna, aproximadamente, los valores de Q_1 , Me , Q_3 , p_{20} , p_{95} .

b) ¿Qué percentil tiene un bebé de 8 meses? ¿Y uno de 18?

Resolución



$Q_1 = 13$ meses
 $Me = 16$ meses
 $Q_3 = 20$ meses
 $p_{20} = 12$ meses
 $p_{95} = 24,5$ meses



El percentil de un bebé de 8 meses es p_5 .
 El percentil de un bebé de 18 meses es p_{65} .

2 Considera la siguiente tabla de frecuencias:

INTERVALOS	(6, 8]	(8, 10]	(10, 12]	(12, 14]	(14, 16]	(16, 18]	(18, 20]
FRECUENCIAS	8	10	17	25	18	12	10

a) Halla: \bar{x} , σ , y C.V.

b) Halla: p_{90} , p_{15} y Me .



Resolución

a)

INTERVALOS	MARCA DE CLASE x_i	FRECUENCIA f_i
(6, 8]	7	8
(8, 10]	9	10
(10, 12]	11	17
(12, 14]	13	25
(14, 16]	15	18
(16, 18]	17	12
(18, 20]	19	10
		100

$$\sum f_i = 100$$

$$\sum f_i x_i = 1322$$

$$\sum f_i x_i^2 = 18612$$

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = \frac{1322}{100} = 13,22$$

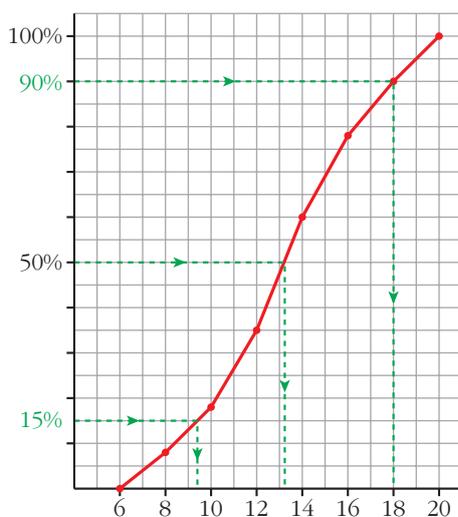
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{100} - 13,22^2} = \sqrt{\frac{18612}{100} - 13,22^2} = 3,37$$

$$\text{C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} = 0,255 = 25,5\%$$

b) Para el cálculo de las medidas de posición, es necesario obtener las frecuencias (o porcentajes) acumuladas.

VALORES	FRECUENCIAS	FREC. ACUMULADAS
6 - 8	8	8
8 - 10	10	18
10 - 12	17	35
12 - 14	25	60
14 - 16	18	78
16 - 18	12	90
18 - 20	10	100

Como hay 100 individuos ($n = 100$), los porcentajes acumulados coinciden con las frecuencias acumuladas.



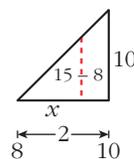
La obtención gráfica de las medidas de posición es solo aproximada:

$$p_{90} = 18 \quad p_{15} \approx 9,4 \quad Me \approx 13,2$$

Obtención numérica:

• $p_{90} = 18$ es exacto, pues se alcanza el 90% en el extremo superior del intervalo (16, 18].

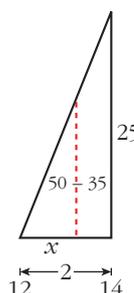
• p_{15}



$$\frac{x}{7} = \frac{2}{10} \rightarrow x = 1,4$$

$$p_{15} = 8 + 1,4 = 9,4$$

• Me

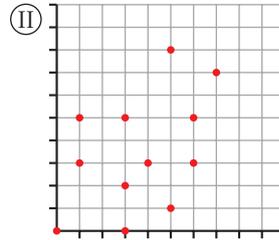
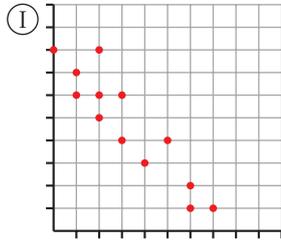


$$\frac{x}{15} = \frac{2}{25} \rightarrow x = 1,2$$

$$Me = 12 + 1,2 = 13,2$$



3 Observa estas dos distribuciones bidimensionales:



Asigna a cada una un coeficiente de correlación tomándolo de entre los siguientes valores:

0,11; -0,11; 0,46; -0,46; 0,92; -0,92; 1; -1

Responde razonadamente (observa que no se te pide que hagas operaciones, sino que razones a partir de las nubes de puntos).

Resolución

La correlación de I es fuerte y negativa. El único valor razonable de los que se muestran es -0,92 (-0,46 es demasiado débil y -1 solo sería si todos los puntos estuvieran alineados).

La correlación de II es positiva pero débil. Su valor es 0,46.

4 A 10 alumnos de una clase se les toman las siguientes medidas:

x = número de faltas de asistencia a clase en 1 mes.

y = nota en matemáticas.

x	0	2	3	3	4	5	5	6	7	9
y	9	6	4	9	6	1	8	3	5	1

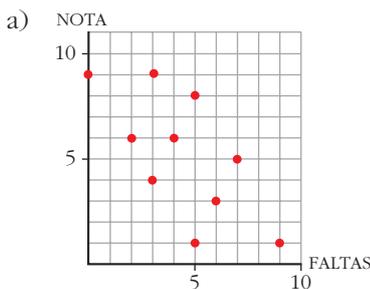
a) Representa la distribución mediante una nube de puntos y calcula: \bar{x} , \bar{y} , σ_x , σ_y , σ_{xy} .

b) Halla el coeficiente de correlación.

c) Halla la recta de regresión de Y sobre X .

d) Otro alumno de la misma clase que haya faltado 1 vez, ¿qué nota en matemáticas estimas que tendrá? ¿Crees que es una buena estimación?

Resolución



$$\bar{x} = 4,4, \bar{y} = 5,2$$

$$\sigma_x = 2,46, \sigma_y = 2,82, \sigma_{xy} = -4,68$$

$$b) r = \frac{-4,68}{2,46 \cdot 2,82} = -0,68$$

$$c) m_{yx} = \frac{-4,68}{2,46^2} = -0,77$$

Recta de regresión de Y sobre X :

$$y = 5,2 - 0,77(x - 4,4) \rightarrow y = -0,77x + 8,59$$



$$d) \hat{y}(1) = -0,77 \cdot 1 + 8,61 = 7,82$$

Se estima una nota de 7 u 8 puntos. Pero la estimación es mala, porque la correlación es demasiado baja como para hacer estimaciones muy fiables.

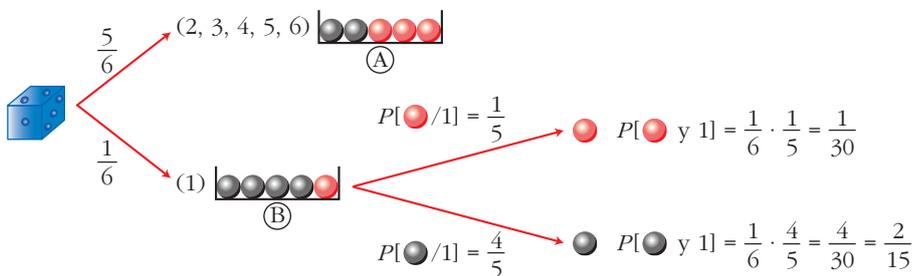
5  A  B 

Si en el dado sale 1, sacamos bola de B. Si sale otra puntuación, la sacamos de A.

Calcula:

$$P[\text{rojo}/1] \quad P[\text{rojo y 1}] \quad P[\text{negro}/1] \quad P[\text{negro y 1}]$$

Resolución



Las probabilidades $P[\text{rojo}/1]$ y $P[\text{negro}/1]$ son, ambas, suponiendo que sale un 1. Por tanto, se calculan en la urna B:

- $P[\text{rojo}/1]$ es la probabilidad de obtener rojo en la urna B.
- Análogamente, $P[\text{negro}/1]$.

La probabilidad $P[\text{rojo y 1}]$ exige las dos cosas: que salga 1 y que se obtenga bola roja. Es una probabilidad compuesta:

$$\bullet P[1 \text{ y rojo}] = P[1] \cdot P[\text{rojo}/1] = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{16}{30}$$

$$\text{Análogamente, } P[1 \text{ y negro}] = P[1] \cdot P[\text{negro}/1] = \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$$

6 En una distribución $N(0, 1)$ calcula:

a) $P[0,25 < z < 1,45]$ b) $P[-0,25 < z \leq 1,45]$

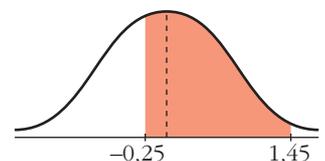
c) Calcula k para que: $P[-k < z < k] = 0,90$

Resolución

z es $N(0, 1)$.

a) $P[0,25 < z < 1,45] = P[z < 1,45] - P[z < 0,25] = \Phi(1,45) - \Phi(0,25) = 0,9265 - 0,5987 = 0,3278$

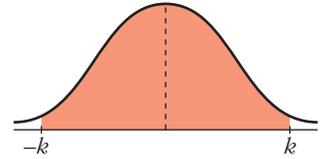
b) $P[-0,25 < z \leq 1,45] = \Phi(1,45) - [1 - \Phi(0,25)] = 0,9265 + 0,5987 - 1 = 0,5252$





$$c) P[-k < z < k] = 2 \cdot P[0 < z < k] = 2 \cdot [P[z < k] - 0,5] = 2[\phi(k) - 0,5] = 2\phi(k) - 1$$

$$2\phi(k) - 1 = 0,90 \rightarrow \phi(k) = \frac{0,90 + 1}{2} = 0,95 \rightarrow k \approx 1,64$$



7 En una distribución $N(20, 4)$ calcula:

a) $P[x = 21]$

b) $P[x < 21]$

c) $P[19 \leq x \leq 21]$

Resolución

$$x \text{ es } N(20, 4) \rightarrow z = \frac{x - 20}{4} \text{ es } N(0, 1)$$

a) $P[x = 21] = 0$, ya que las probabilidades puntuales son cero en las distribuciones de variable continua.

$$b) P[x < 21] = P\left[z < \frac{21 - 20}{4}\right] = P[z < 0,25] = \phi(0,25) = 0,5987$$

$$c) P[19 \leq x \leq 21] = P\left[\frac{19 - 20}{4} \leq z \leq \frac{21 - 20}{4}\right] = P[-0,25 \leq z \leq 0,25] = \phi(0,25) - (1 - \phi(0,25)) = 2\phi(0,25) - 1 = 2 \cdot 0,5987 - 1 = 0,1974$$

8 En una distribución $B(10; 0,4)$ calcula:

a) $P[x = 0]$, $P[x = 1]$, $P[x > 1]$

b) Los parámetros μ y σ .

Resolución

$$B(10; 0,4) \rightarrow n = 10; p = 0,4; q = 0,6$$

$$\left. \begin{aligned} a) P[x = 0] &= \binom{10}{0} 0,4^0 \cdot 0,6^{10} = 0,6^{10} = 0,0060 \\ P[x = 1] &= \binom{10}{1} 0,4^1 \cdot 0,6^9 = 10 \cdot 0,4 \cdot 0,6^9 = 0,0403 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\rightarrow P[x = 0 \text{ ó } x = 1] = 0,0463 \rightarrow \\ &\rightarrow P[x > 1] = 1 - 0,0463 = 0,9537 \end{aligned}$$

b) $\mu = np = 10 \cdot 0,4 = 4$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{2,4} = 1,55$$

9 La proporción de personas nacidas un 29 de febrero es $1/1461$. Justifica por qué.

¿Cuál es la probabilidad de que en una localidad de 20 000 habitantes haya menos de 8 personas nacidas un 29 de febrero?

Resolución

• “29 de febrero” hay uno cada cuatro años. ¿Cuántos días son?:

$$365 \cdot 3 + 366 = 1461$$

$$\text{Así, } P[29 \text{ de febrero}] = \frac{1}{1461}.$$

• Es una distribución binomial con $n = 20000$ y $p = \frac{1}{1461}$.



En una $B\left(20\,000, \frac{1}{1\,461}\right)$, $\mu = 20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} = 13,69$

$$\sigma = \sqrt{20\,000 \cdot \frac{1}{1\,461} \cdot \frac{1\,460}{1\,461}} = 3,70$$

Podemos calcular las probabilidades a partir de la normal $N(13,69; 3,70)$.

x es $B\left(20\,000, \frac{1}{1\,461}\right) \rightarrow x'$ es $N(13,69; 3,70) \rightarrow z$ es $N(0, 1)$ con $z = \frac{x' - 13,69}{3,70}$

$$P[x < 8] = P[x \leq 7] = P[x' \leq 7,5] = P\left[z \leq \frac{7,5 - 13,69}{3,70}\right] = P[z \leq -1,67] = 1 - \Phi(1,67) = 1 - 0,9525 = 0,0475$$

Es poco probable que haya menos de 8 personas nacidas un día tan singular.

10 a) Calcula k para que la siguiente tabla corresponda a una distribución de probabilidad:

x_i	11	12	13	14	15	16
p_i	0,15	0,1	0,12	0,17	k	k

b) Halla $P[13 \leq x_i \leq 15]$.

c) Calcula los parámetros μ y σ .

Resolución

a) $0,15 + 0,10 + 0,12 + 0,17 + k + k = 1 \rightarrow 0,54 + 2k = 1 \rightarrow k = 0,23$

x_i	11	12	13	14	15	16
p_i	0,15	0,1	0,12	0,17	0,23	0,23

b) $P[13 \leq x_i \leq 15] = P[13] + P[14] + P[15] = 0,12 + 0,17 + 0,23 = 0,52$

c) $\mu = \sum p_i x_i = 13,92$

$$\sigma = \sqrt{\sum p_i x_i^2 - \mu^2} = 1,73$$