¿TÉRMINO GENERAL O FORMA RECURRENTE?

Hay sucesiones que se dan por su término general, como $a_n = \dfrac{3n^2 - 5}{2\sqrt{n^3 + 1}}$.

En algunos casos se dan los primeros términos y estos son tales que lo natural es recurrir al término general para describirlos. Por ejemplo:

$2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26,\ \dots \to a_n = n^2 + 1$

En otros casos, es la forma recurrente la que mejor se presta para describir la sucesión:

$1,\ 3,\ 7,\ 17,\ 41,\ 99,\ \dots \to a_{n+2} = a_n + 2\,a_{n+1}$

(cada término se obtiene sumando el doble del último con el penúltimo).

Es claro que el término general tiene una gran ventaja sobre la forma recurrente, pues podemos, a partir de él, obtener cualquier término sin pasar por los intermedios. Por eso, se intenta conseguir el término general de las sucesiones dadas en forma recurrente.

En las progresiones, cada término se obtiene sumando o multiplicando el anterior por un número fijo, según sean aritméticas o geométricas. Esta descripción está hecha "por recurrencia", pues cada término se obtiene del anterior. Y, en ellas, en las progresiones, es muy fácil obtener el término general (puedes ver el epígrafe 2.2 de tu libro de texto).

Sin embargo, en otros casos es muy difícil obtener el término general a partir de una ley de recurrencia. Es lo que le ocurre a la sucesión de Fibonacci: $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ \dots$

Su término general, además de ser muy complicado de obtener, tiene una fisonomía sumamente extraña. Observa:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Con ayuda de la calculadora podemos obtener cualquiera de sus términos. Por ejemplo, sabemos que $a_6 = 8$. Obtengámoslo con la fórmula:

1 [+] [√] 5 [=] [÷] 2 [=] [x^y] 6 [=] [−] [(] [(] 1 [−] [√] 5 [)] [÷] 2 [)] [x^y] 6 [=] [÷] [√] 5 [=]

EJERCICIO 1

Calcula tú, de este modo, $a_8 = 21$.

Observa que el sustraendo, $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, toma valores muy próximos a 0 para valores de n un poco grandes. Esto nos permite obtener un valor muy aproximado de a_n mediante:

$$a_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Por ejemplo, $a_7 \approx 12{,}98 \approx 13$. Es decir, $a_7 = 13$.

EJERCICIO 2

Calcula tú, de esta forma, a_{10} y a_{20}.

DOS SUCESIONES EMPAREJADAS

A propósito de las sucesiones dadas de forma recurrente, observa las siguientes, que se forman recurriendo cada una de ellas a la otra:

$l_1 = 1$	$d_1 = 1$
$l_2 = 1 + 1 = 2$	$d_2 = 2 + 1 = 3$
$l_3 = 2 + 3 = 5$	$d_3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
…	…
$l_n = l_{n-1} + d_{n-1}$	$d_n = 2l_{n-1} + d_{n-1}$

EJERCICIO 3

Calcula los diez primeros términos de cada una de estas sucesiones:

$l_n = l_{n-1} + d_{n-1} \rightarrow 1, \; 2, \; 5, \ldots$

$d_n = 2l_{n-1} + d_{n-1} \rightarrow 1, \; 3, \; 7, \ldots$

EJERCICIO 4

Comprueba que el cociente d_n/l_n se parece cada vez más a $\sqrt{2}$.

Este par de sucesiones fueron construidas por los pitagóricos. Tienen la particularidad de que no solo son recurrentes, sino que cada una de ellas ha de recurrir a la otra.

El límite de d_n/l_n es $\sqrt{2}$, igual que el cociente entre la diagonal, d, y el lado, l, de un cuadrado.