DEMOSTRACIÓN DE

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Haremos la demostración aplicando el método de **inducción completa**. Este método consiste en:

- Probar que la igualdad es cierta para $n = 1$ (y, si se quiere, para $n = 2$, $n = 3$, …).
- Probar que, si la igualdad fuera cierta para un n, lo sería para el siguiente, $n + 1$.

Pues bien, apliquemos este método a nuestra demostración:

- Para $n = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{PRIMER MIEMBRO: } 1^2 = 1 \\ \text{SEGUNDO MIEMBRO: } \dfrac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1 \end{array}\right\} \text{Coinciden}$$

  Por tanto, la igualdad se cumple para $n = 1$.

- Suponemos que es cierta para un valor de n y, a partir de ahí, debemos deducir que es cierta para el siguiente, $n + 1$:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right] =$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6} + \frac{6n+6}{6}\right) = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6} =$$

$$= (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)\cdot[(n+1)+1]\cdot[2(n+1)+1]}{6}$$

La expresión final es el segundo miembro de la igualdad que queremos demostrar, pero cambiando la n por $n + 1$. Por tanto, se cumple para $n + 1$.

DEMOSTRACIÓN DE

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Lo haremos, también, por inducción completa:

- Para $n = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \text{PRIMER MIEMBRO: } 1^3 = 1 \\ \text{SEGUNDO MIEMBRO: } \dfrac{1^2 \cdot 2^2}{4} = 1 \end{array}\right\} \text{Coinciden}$$

  La igualdad es cierta para $n = 1$.

- La suponemos cierta para n. ¿Lo será para $n + 1$?

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + (n+1)^3 =$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + (n+1)\right] =$$

$$= (n+1)^2\,\frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} = \frac{(n+1)^2[(n+1)+1]^2}{4}$$

  Y este es el segundo miembro de la igualdad, pero cambiando n por $n + 1$.

MÉTODO DE INDUCCIÓN COMPLETA

Este método, que ya hemos explicado al principio, se usa para demostrar igualdades en las que intervienen números naturales, descritos por la variable n. Su lógica consiste en lo siguiente:

Si la propiedad $P(n)$ es cierta para $n = 1$ y, además,

si fuera cierta para n lo sería para $n + 1$, entonces:

Es cierta para $n = 1$: $P(1)$

Si es cierta $P(n)$, entonces es cierta $P(n+1)$.

Es cierta para $n = 2$: $P(2)$

Si es cierta $P(n)$, entonces es cierta $P(n+1)$.

Es cierta para $n = 3$: $P(3)$

Y así, sucesivamente, es cierta para cualquier n.