1 **Halla el término a_{47} de la sucesión cuyo término general es:**

$$a_n = \frac{n^2 - 709}{n + 3}$$

Resolución

$a_{47} = \dfrac{47^2 - 709}{47 + 3} = \dfrac{2\,209 - 709}{50} = 30$

2 **Halla el término octavo de la sucesión definida así:**

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 7, \quad a_{n+2} = 2a_n - a_{n+1}$$

Resolución

$a_8 = 2a_6 - a_7$

$a_1 = 4$	$a_2 = 7$
$a_3 = 2a_1 - a_2 = 1$	$a_4 = 2a_2 - a_3 = 13$
$a_5 = 2a_3 - a_4 = -11$	$a_6 = 2a_4 - a_5 = 37$
$a_7 = 2a_5 - a_6 = -59$	$a_8 = 2a_6 - a_7 = 133$

3 **Halla el término general de las sucesiones:**

a) 3, 7, 11, 15, 19, 23, …

b) 1, 2, 5, 10, 17, 26, …

Resolución

a) Es una progresión aritmética de diferencia $d = 4$ y primer término $a_1 = 3$.

$a_n = a_1 + (n - 1)d = 3 + (n - 1) \cdot 4 = 4n - 1$

b) El término general de la sucesión 0, 1, 4, 9, 16, 25, … es $a_n = (n - 1)^2$.

Por tanto, 1, 2, 5, 10, 17, 26, … tiene por término general $a_n = (n - 1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$.

4 **Halla la ley de recurrencia por la que se forman las siguientes sucesiones:**

a) 7, 8, 15, 23, 38, 61, …

b) 1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, …

c) 0, 1, 2, 3, 6, 11, 20, 37, …

Resolución

a) Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Por tanto:

$a_1 = 7 \qquad a_2 = 8 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$

b) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

c) Cada término, a partir del cuarto, es la suma de los tres anteriores. Por tanto:

$a_1 = 0 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 2 \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$

5 **Halla las siguientes sumas:**

a) $3 + 7 + 11 + \dots + 43$

b) $1\,000 + 1\,000 \cdot 1{,}1 + 1\,000 \cdot 1{,}1^2 + \dots + 1\,000 \cdot 1{,}1^{15}$

c) $80 + 40 + 20 + 10 + 5 + \dots$

d) $101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2$

e) $3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3$

Resolución

a) Es la suma de los once primeros términos de una progresión aritmética de primer término $a_1 = 3$ y diferencia $d = 4$.

$a_n = 4n - 1 \qquad a_1 = 3 \qquad a_{11} = 43$

$$S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = \frac{3 + 43}{2} \cdot 11 = 253$$

b) Es la suma de los quince primeros términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 1\,000$ y razón $r = 1{,}1$.

$$S_n = \frac{a_1 r^n - a_1}{r - 1} \rightarrow S_{15} = \frac{1\,000 \cdot 1{,}1^{15} - 1\,000}{1{,}1 - 1} = 31\,772{,}48$$

c) Es la suma de los infinitos términos de una progresión geométrica de primer término $a_1 = 80$ y razón $r = 1/2$.

$$S_\infty = \frac{a_1}{1 - r} = \frac{80}{1 - 1/2} = 160$$

d) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$101^2 + 102^2 + 103^2 + \dots + 140^2 = (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 140^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 100^2) =$$

$$= \frac{140 \cdot 141 \cdot 281}{6} - \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} = \frac{5\,546\,940 - 2\,030\,100}{6} = 586\,140$$

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$3^3 + 4^3 + 5^3 + \dots + 15^3 = (1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 15^3) - (1^3 + 2^3) = \frac{15^2 \cdot 16^2}{4} - 9 = 14\,391$$

6 **En una progresión aritmética conocemos $a_{15} = 43$ y $a_{86} = 85{,}6$.**

a) **Calcula $a_1 + a_{100}$.**

b) **Obtén el valor de a_{220}.**

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} a_{15} = a_1 + 14d = 43 \\ a_{86} = a_1 + 85d = 85{,}6 \end{array}\right\} \rightarrow 85d - 14d = 42{,}6 \rightarrow d = 0{,}6 \qquad a_1 = 43 - 14 \cdot 0{,}6 = 34{,}6$$

a) $a_1 + a_{100} = a_{15} + a_{86} = 43 + 85{,}6 = 128{,}6$ pues $1 + 100 = 15 + 86$ (a_{15} y a_{86} "equidistan" de a_1 y a_{100}).

b) $a_{220} = a_1 + 219 \cdot d = 34{,}6 + 219 \cdot 0{,}6 = 166$

7 **Halla los límites de las siguientes sucesiones:**

$$a_n = \frac{5}{n} \qquad b_n = \frac{5 + 3n}{n + 1} \qquad c_n = \frac{n^2 + 1}{5n}$$

Resolución

a) $a_{10} = 0{,}5$ $\quad a_{100} = 0{,}05$ $\quad a_{1\,000} = 0{,}005 \rightarrow \text{lím}\ \frac{5}{n} = 0$

b) $b_{10} = 3{,}18$ $\quad b_{100} = 3{,}02$ $\quad b_{1\,000} = 3{,}002 \rightarrow \text{lím}\ \frac{5 + 3n}{n + 1} = 3$

c) $c_{10} = 2{,}02$ $\quad c_{100} = 20{,}002$ $\quad c_{1\,000} = 200{,}0002 \rightarrow \text{lím}\ \frac{n^2 + 1}{5n} = +\infty$