1 **Resuelve factorizando previamente.**

$$\mathbf{3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0}$$

Resolución

$3x^5 + x^4 - 9x^3 - 9x^2 - 2x = 0$

$x(3x^4 + x^3 - 9x^2 - 9x - 2) = 0$

	3	1	–9	–9	–2
–1		–3	2	7	2
	3	–2	–7	–2	0
2		6	8	2	
	3	4	1	0	

$$3x^2 + 4x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{-4 \pm 2}{6} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

La ecuación factorizada queda así:

$$x(x + 1)^2 \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 2) = 0$$

Las soluciones son: $x_1 = 0$; $x_2 = -1$; $x_3 = -\dfrac{1}{3}$; $x_4 = 2$

2 **Opera y simplifica el resultado.**

$$\left(\frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{x^2 - 1}} - \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{x + 1}}\right) : \frac{\mathbf{3x}}{\mathbf{x - 1}}$$

Resolución

$$\left(\frac{x^2}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1}\right) : \frac{3x}{x - 1} = \frac{x^2 - x(x - 1)}{x^2 - 1} : \frac{3x}{x - 1} = \frac{(x^2 - x^2 + x)(x - 1)}{3x(x^2 - 1)} : \frac{x(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)3x} = \frac{1}{3(x + 1)}$$

3 **Resuelve las siguientes ecuaciones:**

a) $\mathbf{x^4 - 3x^2 + 2 = 0}$

b) $\mathbf{\sqrt{8 + 2x} - x = x + 6}$

c) $\mathbf{\dfrac{3x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{4}{3}}$

d) $\mathbf{3^{x - 1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}}$

e) $\mathbf{2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0}$

f) $\mathbf{\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x + 1)}$

g) $\mathbf{|3x + 1| = |x - 3|}$

Resolución

a) $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

Hacemos el cambio $y = x^2$.

$$y^2 - 3y + 2 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 2 \\ 1 \end{cases}$$

$$y = 2 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{cases}$$

$y = 1 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{y} \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

Las soluciones son: $x_1 = \sqrt{2};\; x_2 = -\sqrt{2};\; x_3 = 1;\; x_4 = -1$

b) $\sqrt{8 + 2x} - x = x + 6 \;\rightarrow\; \sqrt{8 + 2x} = 2x + 6$

Elevamos al cuadrado ambos miembros.

$(\sqrt{8 + 2x})^2 = (2x + 6)^2 \;\rightarrow\; 8 + 2x = 4x^2 + 36 + 24x \;\rightarrow\; 4x^2 + 22x + 28 = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 + 11x + 14 = 0$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 112}}{4} = \frac{-11 \pm 3}{4} = \begin{cases} -2 \\ -\dfrac{7}{2} \end{cases}$$

Comprobada sobre la ecuación inicial, el resultado $-\dfrac{7}{2}$ resulta ser no válido.

Por tanto, la solución de la ecuación es $x = -2$.

c) $\dfrac{3x}{x^2 - 4} = \dfrac{x}{x + 2} - \dfrac{4}{3} \;\rightarrow\; \dfrac{9x}{3(x^2 - 4)} = \dfrac{3x(x - 2) - 4(x^2 - 4)}{3(x^2 - 4)} \;\rightarrow\; 9x = 3x^2 - 6x - 4x^2 + 16 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 + 15x - 16 = 0 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{225 + 64}}{4} = \dfrac{-15 \pm 17}{2} = \begin{cases} 1 \\ -16 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = 1;\; x_2 = -16$

d) $3^{x-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\rightarrow\; 3^{x-1} = 3^{-1/2} \;\rightarrow\; x - 1 = -\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2}$

e) $2^{2x} - 6 \cdot 2^x + 8 = 0 \;\rightarrow\; (2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Hacemos el cambio $y = 2^x$, con lo que obtenemos:

$$y^2 - 6y + 8 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$y = 4 \;\rightarrow\; 2^x = 4 \;\rightarrow\; 2^x = 2^2 \;\rightarrow\; x = 2$

$y = 2 \;\rightarrow\; 2^x = 2 \;\rightarrow\; 2^x = 2^1 \;\rightarrow\; x = 1$

Soluciones: $x_1 = 1;\; x_2 = 2$

f) $\ln x + \ln 4 = 2 \ln (x + 1) \;\rightarrow\; \ln 4x = \ln (x + 1)^2 \;\rightarrow\; 4x = (x + 1)^2 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; (x - 1)^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 1$

Solución: $x = 1$

g) $|3x + 1| = |x - 3| \begin{cases} 3x + 1 = x - 3 \;\rightarrow\; 2x = -4 \;\rightarrow\; x = -2 \\ 3x + 1 = -(x - 3) \;\rightarrow\; 4x = 2 \;\rightarrow\; x = 1/2 \end{cases}$

Soluciones: $x_1 = -2;\; x_2 = \dfrac{1}{2}$

4 **Resuelve estos sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{cases}$

Resolución

a) $\left.\begin{array}{r} y - 2x = 0 \\ 3^y - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = 2x \\ 3^{2x} - 6 \cdot 3^x = -9 \end{array}$

Hacemos el cambio $3^x = z$:

$z^2 - 6z + 9 = 0 \rightarrow z = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = 3$

$3^x = 3 \rightarrow x = 1$

$x = 1 \rightarrow y = 2$

Solución: $x = 1$; $y = 2$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ x + y + 3z = 0 \\ -2x + 3y + 3z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{2.^a - 1.^a} \\ \xrightarrow{3.^a + 2 \cdot 1.^a} \end{array} \left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 7y + 7z = 7 \end{array}\right\} \xrightarrow{3.^a + 7 \cdot 2.^a} \left.\begin{array}{r} x + 2y + 2z = 3 \\ -y + z = -3 \\ 14z = -14 \end{array}\right\}$

$14z = -14 \rightarrow z = -1$

$-y + z = -3 \rightarrow -y - 1 = -3 \rightarrow y = 2$

$x + 2y + 2z = 3 \rightarrow x + 4 - 2 = 3 \rightarrow x = 1$

Solución: $x = 1$; $y = 2$; $z = -1$

5 **Resuelve:**

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$

Resolución

a) $x(x - 1) - 2(x + 2) < x(x + 1) \rightarrow x^2 - x - 2x - 4 < x^2 + x \rightarrow -4x - 4 < 0 \rightarrow 4x > -4 \rightarrow x > -1$

Solución: $x \in (-1, +\infty)$

b) $\dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3} \geq 0$

Para que un cociente sea positivo, el numerador y el denominador han de serlo.

$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, $(x + 1)^2 \geq 0$ para cualquier valor de x.

Para $x = -3$, la ecuación no tiene solución, ya que el denominador ha de ser cero.

Veamos dónde es $x + 3$ positivo.

$x + 3 > 0 \rightarrow x > -3$

Solución: $x \in (-3, +\infty)$

6 **La suma de las tres cifras de un número es igual a 7. La cifra de las decenas es una unidad mayor que la suma de las otras dos.**

Si invertimos el orden de las cifras, el número aumenta en 99 unidades. ¿Cuál es ese número?

Resolución

Supongamos que el número es xyz.

$xyz = z + 10y + 100x$

$zyx = x + 10y + 100z$

Con los datos que tenemos, el sistema que se plantea es:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ y = x + z + 1 \\ x + 10y + 100z = 99 + z + 10y + 100x \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ -x + y - z = 1 \\ -99x + + 99z = 99 \end{array}\right\} \xrightarrow{1.^a + 2.^a} \left.\begin{array}{r} x + y + z = 7 \\ 2y = 8 \\ -x + z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow \boxed{y = 4}$$

$$\left.\begin{array}{r} x + z = 3 \\ -x + z = 1 \end{array}\right\} 2z = 4 \rightarrow \boxed{z = 2}$$

$$-x + z = 1 \rightarrow -x + 2 = 1 \rightarrow \boxed{x = 1}$$

El número buscado es el 142.