4. Resoluciones de la autoevaluación del libro de texto

1 **Expresa en grados:** $\frac{3\pi}{4}$ **rad,** $\frac{5\pi}{2}$ **rad, 2 rad.**

Resolución

$\frac{3\pi}{4}$ rad $= \frac{3 \cdot 180°}{4} = 135°$

$\frac{5\pi}{2}$ rad $= 450°$

2 rad $= \frac{2 \cdot 180°}{\pi} = 114°\ 35'\ 30''$

2 **Expresa en radianes dando el resultado en función de** π **y como número decimal:**

a) 60° **b) 225°** **c) 330°**

Resolución

a) $60° = \frac{\pi}{3}$ rad = 1,05 rad

b) $225° = \frac{225\pi}{180}$ rad $= \frac{5\pi}{4}$ rad = 3,93 rad

c) $330° = \frac{330\pi}{180}$ rad $= \frac{11\pi}{6}$ rad = 5,76 rad

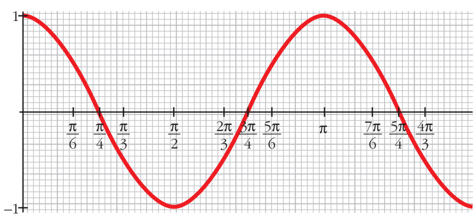
3 **En una circunferencia de 16 cm de diámetro dibujamos un ángulo de 3 rad. ¿Qué longitud tendrá el arco correspondiente?**

Resolución

$l = 8 \cdot 3 = 24$ cm

4 **Asocia a esta gráfica una de las siguientes expresiones y di cuál es su periodo:**

a) $y = \cos x$ **b)** $y = \cos 2x$ **c)** $y = 2\cos x$



Completa estos puntos para que pertenezcan a la gráfica: (5π/6, ...), (4π/3, ...), (–π/4, ...).

Resolución

Corresponde a b) $y = \cos 2x$.

Si $x = \frac{5\pi}{6}$, $y = \cos \frac{2 \cdot 5\pi}{6} = \cos \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{1}{2}\right)$

Si $x = \frac{4\pi}{3}$, $y = \cos \frac{8\pi}{3} = -\frac{1}{2} \rightarrow \left(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{2}\right)$

Si $x = -\frac{\pi}{4}$, $y = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow \left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

5 **Si $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ y $\alpha < \pi$, halla:**

a) $\sin 2\alpha$ **b)** $\cos(\pi + \alpha)$ **c)** $tg\,\frac{\alpha}{2}$ **d)** $sen\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)$

Resolución

Si $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$ y $\alpha < \pi$, α está en el segundo cuadrante.

$$sen\,\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

a) $sen\,2\alpha = 2\,sen\,\alpha\cos\alpha = 2\left(-\frac{1}{4}\right)\frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{\sqrt{15}}{8}$

b) $\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha = \frac{1}{4}$

c) $tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{1 + 1/4}{1 - 1/4}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$ $\left(\frac{\alpha}{2}\right.$ está en el primer cuadrante; su tangente es positiva.$\left.\right)$

d) $sen\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = sen\,\frac{\pi}{6}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{6}\,sen\,\alpha = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} = -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{45}}{8} = -\frac{1 + 3\sqrt{5}}{8}$

6 **Demuestra cada una de estas igualdades:**

a) $tg\,2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 - tg^2\,\alpha}$

b) $sen(\alpha + \beta)\cdot sen(\alpha - \beta) = sen^2\alpha - sen^2\beta$

Resolución

a) $tg\,2\alpha = tg(\alpha + \alpha) = \frac{tg\,\alpha + tg\,\alpha}{1 - tg\,\alpha\,tg\,\alpha} = \frac{2tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$

O bien:

$$tg\,2\alpha = \frac{sen\,2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - sen^2\alpha} = \frac{\frac{2\,sen\,\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{2tg\,\alpha}{1 + tg^2\,\alpha}$$

b) $sen(\alpha + \beta)\cdot sen(\alpha - \beta) = (sen\,\alpha\cos\beta + \cos\alpha\,sen\,\beta)(sen\,\alpha\cos\beta - \cos\alpha\,sen\,\beta) =$

$= (sen\,\alpha\cos\beta)^2 - (\cos\alpha\,sen\,\beta)^2 = sen^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\,sen^2\beta =$

(Sustituimos $\cos^2\beta = 1 - sen^2\beta$ y $\cos^2\alpha = 1 - sen^2\alpha$)

$= sen^2\alpha(1 - sen^2\beta) - (1 - sen^2\alpha)\,sen^2\beta =$

$= sen^2\alpha - sen^2\alpha\,sen^2\beta - sen^2\beta + sen^2\alpha\,sen^2\beta = sen^2\alpha - sen^2\beta$

7 **Resuelve:**

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1$

b) $2tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1$

Resolución

a) $\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 1 \;\rightarrow\; \cos^2 x - sen^2 x - (-sen\, x) = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 1 - sen^2 x - sen^2 x + sen\, x = 1 \;\rightarrow\; -2\, sen^2 x + sen\, x = 0 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\, x(-2\, sen\, x + 1) = 0$

- $sen\, x = 0$
  - $x_1 = 0° + 360°k, \quad k \in \mathbb{Z}$
  - $x_2 = 180° + 360°k, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $sen\, x = \frac{1}{2}$
  - $x_3 = 30° + 360°k, \quad k \in \mathbb{Z}$
  - $x_4 = 150° + 360°k, \quad k \in \mathbb{Z}$

b) $2\, tg\, x \cos^2 \frac{x}{2} - sen\, x = 1 \;\rightarrow\; \frac{2\, sen\, x}{\cos x} \cdot \frac{1 + \cos x}{2} - sen\, x = 1 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\, x(1 + \cos x) - \cos x\, sen\, x = \cos x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\, x + sen\, x \cos x - \cos x\, sen\, x = \cos x \;\rightarrow$

$\rightarrow\; sen\, x = \cos x$

- $x_1 = 45° + 360°k, \quad k \in \mathbb{Z}$
- $x_2 = 225° + 360°k, \quad k \in \mathbb{Z}$

8 **Simplifica:**

a) $\frac{sen\, 60° + sen\, 30°}{\cos 60° + \cos 30°}$

b) $\frac{sen^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}\right)$

Resolución

a) $$\frac{sen\, 60° + sen\, 30°}{\cos 60° + \cos 30°} = \frac{2\, sen \frac{60° + 30°}{2} \cdot \cos \frac{60° - 30°}{2}}{2 \cos \frac{60° + 30°}{2} \cdot \cos \frac{60° - 30°}{2}} = \frac{sen\, 45°}{\cos 45°} = tg\, 45° = 1$$

b) $$\frac{sen^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(1 + \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) = \frac{sen^2 \alpha}{1 - \cos \alpha}\left(\frac{1 + \cos \alpha + 1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}\right) = \frac{2\, sen^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2\, sen^2 \alpha}{sen^2 \alpha} = 2$$