1 **Efectúa.**

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)(2-i)}{-3+i}$$

Resolución

$$\frac{(3-2i)^2-(1+i)(2-i)}{-3+i}=\frac{9+4i^2-12i-(2-i+2i-i^2)}{-3+i}=\frac{5-12i-3-i}{-3+i}=$$

$$=\frac{(2-13i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)}=\frac{-6+13i^2-2i+39i}{9-i^2}=\frac{-19+37i}{10}=-\frac{19}{10}+\frac{37}{10}i$$

2 **Calcula z y expresa los resultados en forma binómica.**

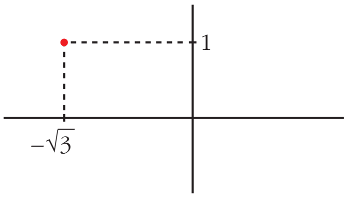
$$\sqrt[4]{z}=\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}$$

Resolución

$$z=\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}\,i}\right)^4$$

Pasamos numerador y denominador a forma polar:

$$-\sqrt{3}+i \;\Big\langle\; \begin{array}{l} r=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2}=2 \\ tg\ \alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\rightarrow\; \alpha=150° \end{array}$$



$$\sqrt{2}i \;\rightarrow\; \sqrt{2}_{90°}$$

$$z=\left(\frac{2_{150°}}{\sqrt{2}_{90°}}\right)^4=(\sqrt{2}_{60°})^4=4_{240°} \;\rightarrow\; z=4\,(cos\ 240°+i\ sen\ 240°)$$

$$z=4\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2-2\sqrt{3}\,i$$

3 **Halla a y b para que se verifique la igualdad:**

$$5(a-2i)=(3+i)(b-i)$$

Resolución

$5a-10i=3b-i^2-3i+bi \;\rightarrow\; 5a-10i=3b+1+(-3+b)i$

Igualando las componentes $\left\{\begin{array}{l} 5a=3b+1 \\ -10=-3+b \end{array}\right\} \rightarrow\; b=-7,\;\; a=-4$

4 **Resuelve la ecuación: $z^2-10z+29=0$**

Resolución

$$z=\frac{10\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{10\pm 4i}{2}\;\Big\langle\; \begin{array}{l} z_1=5+2i \\ z_2=5-2i \end{array}$$

Soluciones: $z_1=5+2i,\;\; z_2=5-2i$

5 **Calcula el valor que debe tomar x para que el módulo de $\dfrac{x + 2i}{1 - i}$ sea igual a 2.**

Resolución

$$\frac{x + 2i}{1 - i} = \frac{(x + 2i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{x + 2i^2 + xi + 2i}{1 - i^2} = \frac{x - 2 + (x + 2)i}{1 + 1} = \frac{x - 2}{2} + \frac{x + 2}{2}i$$

$$\text{Módulo} = \sqrt{\left(\frac{x - 2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x + 2}{2}\right)^2} = 2 \;\rightarrow\; \sqrt{\frac{x^2 + 4}{2}} = 2 \;\rightarrow\; \frac{x^2 + 4}{2} = 4 \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; x^2 + 4 = 8 \;\rightarrow\; x^2 = 4 \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Hay dos *soluciones:* $x_1 = 2$, $x_2 = -2$

6 **Halla el lado del triángulo cuyos vértices son los afijos de las raíces cúbicas de $4\sqrt{3} - 4i$.**

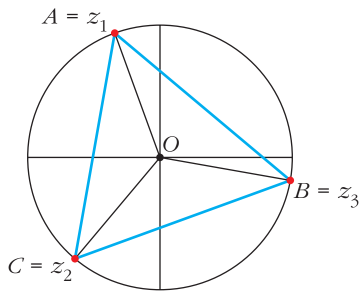
Resolución

$$z = \sqrt[3]{4\sqrt{3} - 4i}$$

Expresamos $4\sqrt{3} - 4i$ en forma polar:

$$\left.\begin{array}{l} r = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2} = 8 \\ tg\ \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \;\rightarrow\; \alpha = 330° \end{array}\right\} \; 4\sqrt{3} - 4i = 8_{330°}$$

$$z = \sqrt[3]{8_{330°}} = \sqrt[3]{8}_{\frac{330° + 360°k}{3}} \begin{cases} z_1 = 2_{110°} \\ z_2 = 2_{230°} \\ z_3 = 2_{350°} \end{cases}$$



En el triángulo AOB conocemos dos lados, $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$, y el ángulo comprendido, 120°. Aplicando el teorema del coseno, obtenemos el lado del triángulo, $\overline{AB}$:

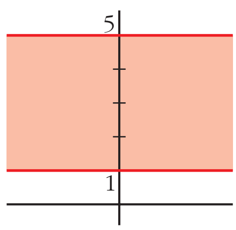
$$\overline{AB}^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot cos\ 120° = 12 \;\rightarrow\; \overline{AB} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ u}$$

7 **Representa gráficamente.**

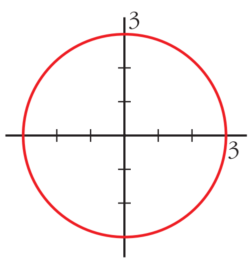
a) $1 \le Im\ z \le 5$ **b)** $|z| = 3$ **c)** $z + \bar{z} = -4$

Resolución

a)

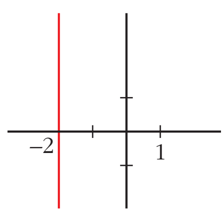


b)



c) $a + bi + a - bi = -4 \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 2a = -4 \;\rightarrow\; a = -2$



8 **Halla dos números complejos tales que su cociente sea $2_{150°}$ y su producto $18_{90°}$.**

Resolución

$\frac{r_\alpha}{s_\beta} = 2_{150°} \to \frac{r}{s} = 2;\ \ \alpha - \beta = 150°$

$r_\alpha \cdot s_\beta = 18_{90°} \to r \cdot s = 18;\ \ \alpha + \beta = 90°$

Resolvemos los sistemas:

$\begin{cases} r/s = 2 \\ r \cdot s = 18 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha - \beta = 150° \\ \alpha + \beta = 90° \end{cases}$

Obtenemos:

$\begin{cases} r = 6 \\ s = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 120° \\ \beta = -30° = 330° \end{cases}$

Los números son $6_{120°}$ y $3_{330°}$. Otra posible solución es: $6_{300°}$ y $3_{150°}$.

9 **Demuestra que $|z \cdot \bar{z}| = |z|^2$.**

Resolución

$\left.\begin{array}{l} z = a + bi \\ \bar{z} = a - bi \end{array}\right\} z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \to \left.\begin{array}{l} |z \cdot \bar{z}| = \sqrt{(a^2 + b^2)^2} = a^2 + b^2 \\ |z|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 \end{array}\right\} |z \cdot \bar{z}| = |z|^2$

10 **Calcula *cos* 120° y *sen* 120° a partir del producto $1_{90°} \cdot 1_{30°}$.**

Resolución

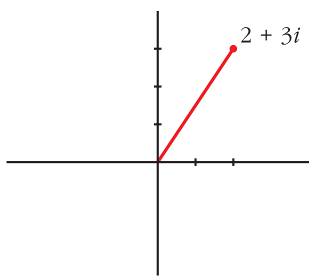
$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°) \cdot 1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) =$

$= i \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$1_{90°} \cdot 1_{30°} = 1_{120°} = 1(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \to \cos 120° = -\frac{1}{2};\ \ \operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

11 **Halla el número complejo z que se obtiene al transformar el complejo $2 + 3i$ mediante un giro de 30° con centro en el origen.**

Resolución



Multipicamos por $1_{30°} = 1(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$.

$z = (2 + 3i) \cdot 1_{30°} = (2 + 3i)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$

$z = \sqrt{3} + \frac{3}{2}i^2 + i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

$z = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} + \frac{2 + 3\sqrt{3}}{2}i$