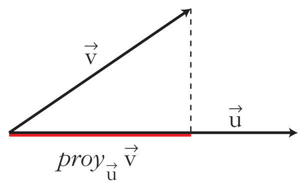
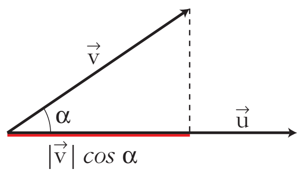
1. Demostración de algunas propiedades del producto escalar

Vamos a demostrar las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva del producto escalar.

Para demostrar las dos últimas, es necesario conocer el concepto de **proyección de un vector sobre otro** (página 177 del libro de texto). Utilizaremos la fórmula siguiente:





$$proy_{\vec{u}}\,\vec{v} = |\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$$

Propiedad conmutativa del producto escalar

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}} \cdot \vec{\mathbf{u}}$$

Demostración

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \overset{(*)}{=} |\vec{v}|\,|\vec{u}|\,cos\ (\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(*) pues $cos\ \alpha = cos(-\alpha)$

Propiedad asociativa del producto escalar

$$\lambda\,(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}) = (\lambda\,\vec{\mathbf{u}}) \cdot \vec{\mathbf{v}}$$

Demostración

$$\lambda\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \lambda\left[|\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})\right] = \lambda\left[|\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}}\,\vec{v}\right]$$

$$(\lambda\,\vec{u}) \cdot \vec{v} = |\lambda\,\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\lambda\,|\vec{u}|)\,|\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \lambda\left[|\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}}\,\vec{v}\right]$$

La igualdad $\lambda\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\,\vec{u}) \cdot \vec{v}$ queda demostrada.

Propiedad distributiva del producto escalar

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot (\vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{w}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} + \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{w}}$$

Demostración

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = |\vec{u}|\,|\vec{v} + \vec{w}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}}) = |\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w})$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{u}|\,|\vec{w}|\,cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = |\vec{u}|\left[|\vec{v}|\ cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{w}|\,cos\ (\widehat{\vec{u}, \vec{w}})\right] =$$

$$= |\vec{u}| \cdot \left[proy_{\vec{u}}\,\vec{v} + proy_{\vec{u}}\,\vec{w}\right] = |\vec{u}| \cdot proy_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w})$$

Así, la igualdad $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = u \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ queda demostrada.