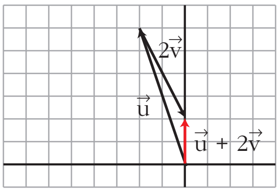
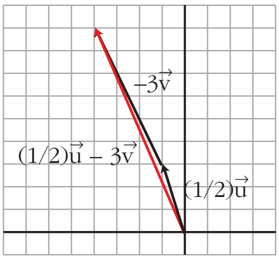
1 **Se consideran los vectores $\vec{u}(-2, 6)$ y $\vec{v}(1, -2)$.**

Calcula $\vec{u} + 2\vec{v}$ y $\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$ gráficamente y utilizando coordenadas.

Resolución



$$\vec{u} + 2\vec{v} = (-2, 6) + 2(1, -2) =$$
$$= (-2, 6) + (2, -4) =$$
$$= (0, 2)$$



$$\frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} = \frac{1}{2}(-2, 6) - 3(1, -2) =$$
$$= (-1, 3) - (3, -6) =$$
$$= (-4, 9)$$

2 **Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 60°. Calcula:**

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

b) $(3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v})$

c) *proy*$_{\vec{u}}$ $(\vec{u} + \vec{v})$

Resolución

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}|\, \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

b) $3\vec{u} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3$

c) $proy_{\vec{u}}\,(\vec{u} + \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v})}{|\vec{u}|} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v}}{1} = |\vec{u}|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

3 **Expresa el vector $\vec{a}(-1, -9)$ como combinación lineal de la base $B = \{(-2, 3), (-1, 5)\}$.**

Resolución

$(-1, -9) = k(-2, 3) + s(-1, 5) = (-2k - s,\ 3k + 5s)$

$$\left.\begin{array}{l} -1 = -2k - s \\ -9 = \ \ 3k + 5s \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 1 - 2k \\ -9 = 3k + 5(1 - 2k) \ \rightarrow\ -9 = -7k + 5 \ \rightarrow\ k = 2 \end{array}$$

$s = 1 - 4 = -3$

Por tanto: $(-1, -9) = 2(-2, 3) - 3(-1, 5)$

$\vec{a} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$

4 **Consideramos los vectores $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:**

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

Resolución

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

c) $cos\,(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\ cos \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

5 **Sea $\vec{u}(-3, k)$, calcula k de forma que:**

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -6)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a 5.

Resolución

a) El producto escalar de dos vectores ortogonales es igual a 0.

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, k) \cdot (4, -6) = -12 - 6k = 0 \rightarrow k = -2$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{9 + k^2} = 5 \rightarrow 9 + k^2 = 25 \rightarrow k = \pm 4$

6 **Determina las coordenadas de un vector $\vec{a}(x, y)$ que forme con el vector $\vec{v}(-1, 0)$ un ángulo de 60° y cuyo módulo sea 2.**

Resolución

$cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{v}}) = cos\ 60° = \dfrac{1}{2} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-x}{2 \cdot 1} \rightarrow x = -1$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + y^2} = 2 \rightarrow 1 + y^2 = 4 \rightarrow y^2 = 3 \rightarrow y = \pm\sqrt{3}$

Hay dos soluciones para el vector $\vec{a}$: $\begin{cases} \vec{a}\,(-1, \sqrt{3}) \\ \vec{a}\,(-1, -\sqrt{3}) \end{cases}$

7 **Obtén un vector $\vec{u}(x, y)$ ortogonal a $\vec{v}(8, 6)$ y cuyo módulo sea la mitad del de $\vec{v}$.**

Resolución

$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad |\vec{v}| = \sqrt{64 + 36} = 10$

$(x, y) \cdot (8, 6) = 8x + 6y = 0$

$|\vec{u}| = \frac{1}{2}|\vec{v}| \;\rightarrow\; \sqrt{x^2 + y^2} = 5 \;\rightarrow\; x^2 + y^2 = 25$

Resolvemos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 8x + 6y = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x = -\frac{3}{4}y \\ \frac{9}{16}y^2 + y^2 = 25 \;\rightarrow\; \frac{25}{16}y^2 = 25 \;\rightarrow\; y^2 = 16 \;\rightarrow\; y = \pm 4 \end{array}$$

$y = 4 \;\rightarrow\; x = -3$

$y = -4 \;\rightarrow\; x = 3$

Hay dos soluciones para $\vec{u}$: $\vec{u}(-3, 4)$; $\vec{u}(3, -4)$

8 **Calcula la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$, siendo $\vec{u}(2, 0)$ y $\vec{v}(-3, -1)$.**

Resolución

$$proy_{\vec{u}}\, \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|} = \frac{-6 + 0}{2} = -3$$

9 **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores unitarios que forman un ángulo de 120°.**
Calcula $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Resolución

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\, cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 1 - 1 + 1 = 1 \;\rightarrow\; |\vec{a} + \vec{b}| = 1$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}|\,|\vec{b}|\, cos\,(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) + |\vec{b}|^2 = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 =$$

$$= 1 + 1 + 1 = 3 \;\rightarrow\; |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{3}$$