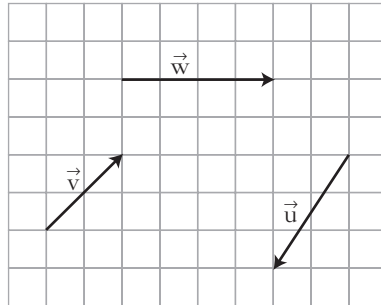




Resoluciones

1 Considera los vectores representados en la siguiente figura:



Representa:

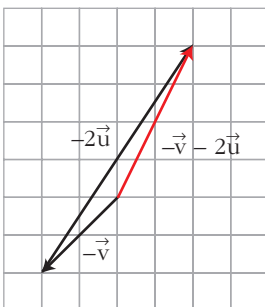
a) $-\vec{v} - 2\vec{u}$

b) $\vec{v} + 3\vec{w}$

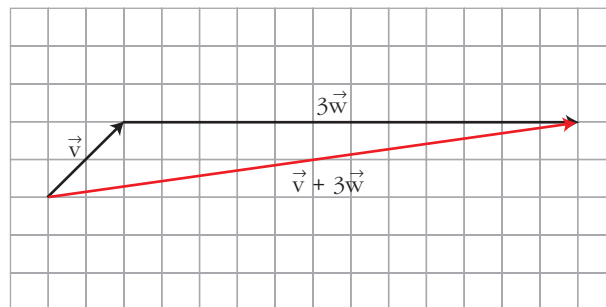
c) $-\vec{w} + 2\vec{v} + \vec{u}$

Resolución

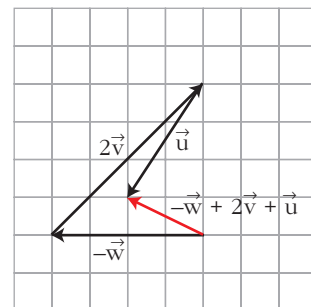
a)



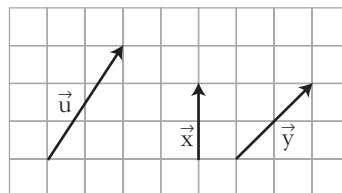
b)



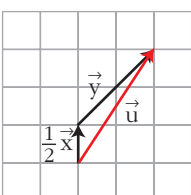
c)



2 Dibuja el vector \vec{u} como combinación lineal de los vectores \vec{x} e \vec{y} . ¿Cuáles son las coordenadas de \vec{u} respecto a la base formada por \vec{x} e \vec{y} ?



Resolución



$$\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{x} + \vec{y}$$

$$\vec{u} \left(\frac{1}{2}, 1 \right)$$



Resoluciones

3 Se consideran los vectores $\vec{u}(0, -4)$, $\vec{v}(-1, 3)$ y $\vec{w}(1, -6)$.

a) Calcula las coordenadas de estos vectores:

$$2\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u} \qquad -\vec{v} - 2\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{w}$$

b) Expresa \vec{w} como combinación lineal de los otros dos.

Resolución

$$a) 2\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u} = 2(-1, 3) + \frac{3}{4}(0, -4) = (-2, 6) + (0, -3) = (-2, 3)$$

$$\begin{aligned} -\vec{v} - 2\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{w} &= -(-1, 3) - 2(0, -4) + \frac{2}{3}(1, -6) = \\ &= (1, -3) + (0, 8) + \left(\frac{2}{3}, -4\right) = \left(\frac{5}{3}, 1\right) \end{aligned}$$

$$b) \vec{w} = k\vec{u} + s\vec{v}$$

$$(1, -6) = k(0, -4) + s(-1, 3)$$

$$\left. \begin{aligned} 1 &= -s \\ -6 &= -4k + 3s \end{aligned} \right\} \begin{aligned} s &= -1 \\ -6 &= -4k - 3 \rightarrow k = 3/4 \end{aligned}$$

$$\text{Por tanto: } \vec{w} = \frac{3}{4}(0, -4) - (-1, 3) = \frac{3}{4}\vec{u} - \vec{v}$$

4 De tres vectores \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} se sabe que $\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v}$. Expresa \vec{u} como combinación lineal de \vec{v} y \vec{w} .

Resolución

$$\vec{w} = \frac{1}{2}\vec{u} - 3\vec{v} \rightarrow 2\vec{w} = \vec{u} - 6\vec{v} \rightarrow \vec{u} = 6\vec{v} + 2\vec{w}$$

5 Los módulos de dos vectores \vec{v} y \vec{w} , que forman un ángulo de 60° , son $|\vec{v}| = 2$ y $|\vec{w}| = 5$. Calcula:

a) $3\vec{w} \cdot (-2\vec{v})$

b) $\vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{v})$

c) $\text{proy}_{\vec{v}}(\vec{v} + \vec{w})$

Resolución

$$a) 3\vec{w} \cdot (-2\vec{v}) = -6(\vec{w} \cdot \vec{v}) = -6(|\vec{w}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 60^\circ) = -6\left(5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = -30$$

$$b) \vec{v} \cdot (\vec{w} + \vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos 60^\circ + |\vec{v}|^2 = 2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} + 4 = 9$$

$$c) \text{proy}_{\vec{v}}(\vec{v} + \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot (\vec{v} + \vec{w})}{|\vec{v}|} = \frac{9}{2}$$



Resoluciones

- 6** Las coordenadas de dos vectores son, respecto a una base ortonormal, $\vec{u}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $\vec{v}\left(2, -\frac{3}{2}\right)$. Calcula:

- El producto escalar de ambos vectores.
- El módulo de cada uno.
- El ángulo que forman.

Resolución

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \cdot \left(2, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{3} - \frac{3}{4} = -\frac{25}{12}$$

$$b) |\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6} \qquad |\vec{v}| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$c) \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-25/12}{(5/6) \cdot (5/2)} = -1 \rightarrow \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 180^\circ$$

- 7** Se consideran los vectores $\vec{u}\left(m, \frac{1}{3}\right)$ y $\vec{v}(4, -3)$. Calcula el valor que debe tomar m para que se cumpla cada una de las siguientes afirmaciones:

- El vector \vec{u} es unitario.
- \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares.
- \vec{u} y \vec{v} tienen el mismo módulo.

Resolución

$$a) |\vec{u}| = 1$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{m^2 + \frac{1}{9}} = 1 \rightarrow m^2 + \frac{1}{9} = 1 \rightarrow m^2 = \frac{8}{9} \begin{cases} m = 2\sqrt{2}/3 \\ m = -2\sqrt{2}/3 \end{cases}$$

$$b) \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left(m, \frac{1}{3}\right) \cdot (4, -3) = 4m - 1 = 0 \rightarrow m = \frac{1}{4}$$

$$c) \left. \begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{m^2 + 1/9} \\ |\vec{v}| = \sqrt{16 + 9} = 5 \end{array} \right\} m^2 + \frac{1}{9} = 25 \rightarrow m^2 = \frac{224}{9} \begin{cases} m = 4\sqrt{14}/3 \\ m = -4\sqrt{14}/3 \end{cases}$$

- 8** Dado el vector $\vec{u}(x, y)$, cuyo módulo es $|\vec{u}| = 1$, determina:

- La forma que tendría un vector con la misma dirección que \vec{u} .
- ¿Cuántos vectores unitarios con la misma dirección que \vec{u} existen? Di cuáles son.
- La forma que tendría un vector ortogonal a \vec{u} .
- ¿Cuántos vectores unitarios ortogonales a \vec{u} existen? Di cuáles son.

Resolución

- Los vectores que tienen la misma dirección son proporcionales.

Los vectores con la misma dirección que \vec{u} son de la forma $k(x, y) = (kx, ky)$, con $k \in \mathbb{R}$.



Resoluciones

b) Además de \vec{u} , su opuesto, $-\vec{u} = (-x, -y)$.

c) Los vectores de coordenadas $(-y, x)$ son ortogonales a \vec{u} . Todos los vectores ortogonales a \vec{u} tendrán la forma $k(-y, x)$, con $k \in \mathbb{R}$.

d) Existen dos: $(-y, x)$, $(y, -x)$.

9 Si $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 5$ y $|\vec{u} - \vec{v}| = 6$, calcula el ángulo que forman los vectores \vec{u} y \vec{v} .

Resolución

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = (\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + |\vec{v}|^2$$

$$\text{Sustituyendo: } 36 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 25 \rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = -1 \rightarrow \widehat{\vec{u}, \vec{v}} = 180^\circ$$

10 Calcula el valor de m para que los vectores $\vec{u}(1, 0)$ y $\vec{v}(m, 1)$ formen un ángulo de 120° .

Resolución

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}; \quad |\vec{u}| = 1; \quad |\vec{v}| = \sqrt{m^2 + 1}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (1, 0) \cdot (m, 1) = m$$

$$m = \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{m^2 + 1} \rightarrow 2m = -\sqrt{m^2 + 1} \rightarrow$$

$$\rightarrow 4m^2 = m^2 + 1 \rightarrow 3m^2 = 1 \begin{cases} m = \sqrt{3}/3 \rightarrow \text{No vale} \\ m = -\sqrt{3}/3 \end{cases}$$

Comprobamos que los vectores $(1, 0)$ y $(\sqrt{3}/3, 1)$ no forman un ángulo de 120° . Por tanto, la única solución válida es $m = -\sqrt{3}/3$.

11 Calcula m y n para que los vectores $\vec{u}(-3, n)$ y $\vec{v}(m, 2)$ sean ortogonales y $|\vec{u}| = 5$.

Resolución

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-3, n) \cdot (m, 2) = -3m + 2n = 0$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{9 + n^2} = 5 \rightarrow 9 + n^2 = 25 \rightarrow n = \pm 4$$

$$\text{Si } n = 4, \quad -3m + 8 = 0 \rightarrow m = \frac{8}{3}$$

$$\text{Si } n = -4, \quad -3m - 8 = 0 \rightarrow m = -\frac{8}{3}$$

Hay, por tanto, dos soluciones: $\vec{u}(-3, 4)$, $\vec{v}(\frac{8}{3}, 2)$ y $\vec{u}(-3, -4)$, $\vec{v}(-\frac{8}{3}, 2)$