Resoluciones

1 **Se consideran los puntos $A(-2, 3)$ y $B(4, 6)$.**

a) Calcula las coordenadas de un punto P que divida al segmento AB en dos partes tales que $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$.

b) Determina k para que el punto $Q(k, 2)$ esté alineado con A y B.

c) Halla el simétrico de A respecto de B.

Resolución

a) $A(-2, 3)$, $B(4, 6)$. Sea $P(x, y)$:

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \to (x + 2, y - 3) = \frac{1}{2}(4 - x, 6 - y) \to$$

$$\to \left.\begin{array}{l} x + 2 = \dfrac{4 - x}{2} \\ y - 3 = \dfrac{6 - y}{2} \end{array}\right\} \begin{array}{l} 2x + 4 = 4 - x \to x = 0 \\ 2y - 6 = 6 - y \to y = 4 \end{array}\Bigg\} P(0, 4)$$

b) $Q(k, 2)$. Para que A, B y Q estén alineados, las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AQ}$ han de ser proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (6, 3) \\ \overrightarrow{AQ} = (k + 2, 2 - 3) \end{array}\right\} \frac{6}{k + 2} = \frac{3}{-1} \to 3k + 6 = -6 \to k = -4$$

c) Si $C(x, y)$ es el simétrico de A respecto de B, entonces B es el punto medio del segmento AC.

$$(4, 6) = \left(\frac{x - 2}{2}, \frac{y + 3}{2}\right) \to \left\{\begin{array}{l} 8 = x - 2 \to x = 10 \\ 12 = y + 3 \to y = 9 \end{array}\right\} C = (10, 9)$$

2 **Escribe las ecuaciones paramétricas e implícita de las rectas que cumplen estas condiciones:**

a) Pasa por los puntos $A(3, -2)$ y $B(-5, -1)$.

b) Pasa por $P(-1, 3)$ y es paralela a $s: \frac{x - 3}{3} = y$.

Resolución

a) Vector posición: $\vec{p} = (3, -2)$

Vector dirección: $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (-8, 1)$

Ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x = 3 - 8t \\ y = -2 + t \end{array}\right.$

$t = y + 2$; $x = 3 - 8(y + 2) = 3 - 8y - 16 \to x + 8y + 13 = 0$

Ecuación implícita: $x + 8y + 13 = 0$

b) El vector dirección de s es $(3, 1)$.

Ecuaciones paramétricas: $\left\{\begin{array}{l} x = -1 + 3t \\ y = 3 + t \end{array}\right.$

$t = y - 3 \to x = -1 + 3(y - 3) \to x = -1 + 3y - 9 \to x - 3y + 10 = 0$

Ecuación implícita: $x - 3y + 10 = 0$

Resoluciones

3 **Escribe las ecuaciones continua y explícita de las rectas que cumplen estas condiciones:**

a) Pasa por el punto de intersección de las rectas r: $3x + 4y + 1 = 0$ y s: $5x + y - 4 = 0$ y es perpendicular a r.

b) Pasa por $P(0, 3)$ y es perpendicular al eje de abscisas.

Resolución

a) Calculamos primero el punto de intersección, P, de r y s:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y + 1 = 0 \\ 5x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 3x + 4y + 1 = 0 \\ -20x - 4y + 16 = 0 \\ \hline -17x + 17 = 0 \end{array} \to x = 1 \to y = -1$$

El punto de intersección de r y s es $P(1, -1)$.

Como la recta buscada ha de ser perpendicular a r, su vector dirección es $(3, 4)$.

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{4}$

$4x - 4 = 3y + 3 \to y = \dfrac{4x-7}{3}$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{7}{3}$

b) Como ha de ser perpendicular al eje de abscisas, su vector dirección es $(0, 1)$.

Ecuación continua: $\dfrac{x-0}{0} = \dfrac{y-3}{1} \to \dfrac{x}{0} = \dfrac{y-3}{1}$

Ecuación explícita: No tiene. Es la recta vertical $x = 0$ (eje Y).

4 **Halla la posición relativa de las rectas r y s y de las rectas s y t. Si son secantes, calcula el punto de corte, y si son paralelas, calcula la distancia entre ellas.**

$$r: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \qquad s: 3x + y - 5 = 0 \qquad t: y = \frac{1}{2}(x-3) + 2$$

Resolución

Vector dirección de r: $(-1, 3)$. Vector dirección de s: $(-1, 3)$. Vector dirección de t: $(2, 1)$

- Las rectas r y s son paralelas, ya que sus vectores dirección son iguales. Calculemos la distancia entre ellas: buscamos un punto $P \in r$ y calculamos la distancia de P a s.

  $P(3, 2) \in r$

  $$dist(P, s) = \frac{|3 \cdot 3 + 2 - 5|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

- Las rectas s y t son secantes. Calculemos su punto de corte:

  $$\left.\begin{array}{l} s: 3x + y - 5 = 0 \\ t: 2y - x + 3 - 4 = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r} 6x + 2y - 10 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \\ \hline 7x - 9 = 0 \end{array} \to x = 9/7$$

  $y = 5 - 3x = 5 - \dfrac{27}{7} = \dfrac{8}{7}$

  s y t se cortan en el punto $\left(\dfrac{9}{7}, \dfrac{8}{7}\right)$.

Resoluciones

5 **Calcula el ángulo que forman los siguientes pares de rectas:**

a) $\begin{cases} r: x = 0 \\ s: y = 2x + 1 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} r: 2x + y - 2 = 0 \\ s: 3x - y = 0 \end{cases}$

Resolución

a) El vector dirección de r es $\vec{d}_r(0, 1)$.

El vector dirección de s es $\vec{d}_s(1, 2)$.

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{d}_r \cdot \vec{d}_s|}{|\vec{d}_r|\,|\vec{d}_s|} = \frac{|0 + 2|}{1 \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \rightarrow \alpha = 26°\ 33'\ 54{,}18''$$

b) $\vec{v}_r = (2, 1) \perp r$ $\vec{v}_s = (3, -1) \perp s$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r|\,|\vec{v}_s|} = \frac{|6 - 1|}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = 45°$$

6 **Considera las rectas $r: y = 2x - 1$ y $s: y = kx + 3$. Determina el valor de k para que estas rectas se corten formando un ángulo de 45°.**

Resolución

Las pendientes de r y s son, respectivamente, $m_r = 2$ y $m_s = k$.

$$tg\ 45° = 1 = \left|\frac{m_s - m_r}{1 + m_r m_s}\right| = \left|\frac{k - 2}{1 + 2k}\right| \rightarrow \begin{cases} k - 2 = 1 + 2k \rightarrow k = -3 \\ k - 2 = -1 - 2k \rightarrow k = 1/3 \end{cases}$$

7 **Determina b para que la distancia entre la recta $r: 3x + 4y + b = 0$ y el punto $P(-1, 1)$ sea igual a 0,4.**

Resolución

$$dist(P, r) = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 + b|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|b + 1|}{5} = 0{,}4 \rightarrow \begin{cases} b + 1 = 2 \rightarrow b = 1 \\ b + 1 = -2 \rightarrow b = -3 \end{cases}$$

8 **Calcula el valor de k para que la distancia entre $A(k, 3)$ y B sea igual a $\sqrt{101}$, siendo B el punto de corte de las rectas $r: x = 2$ y $s: 2x + y + 3 = 0$.**

Resolución

Calculamos el punto de corte, B, de r y s:

$$\left.\begin{matrix} x = 2 \\ 2x + y + 3 = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} x = 2 \\ y = -3 - 2x = -7 \end{matrix}\right\} B(2, -7)$$

$$dist(A, B) = \sqrt{(2 - k)^2 + (-7 - 3)^2} = \sqrt{4 + k^2 - 4k + 100} = \sqrt{101} \rightarrow$$

$$\rightarrow k^2 - 4k + 104 = 101 \rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \left\langle \begin{matrix} k = 3 \\ k = 1 \end{matrix} \right.$$

Resoluciones

9 **Calcula un punto cuya primera coordenada sea un tercio de la segunda y cuya distancia a la recta r: $3x - 4y + 3 = 0$ sea 3.**

Resolución

El punto P buscado es de la forma $P\left(\frac{y}{3}, y\right)$.

$$dist(P, r) = \frac{|3 \cdot y/3 - 4y + 3|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-3y + 3|}{5} = 3 \rightarrow \begin{cases} -3y + 3 = 15 \rightarrow y = -4 \rightarrow P(-4/3, -4) \\ -3y + 3 = -15 \rightarrow y = 6 \rightarrow (2, 6) \end{cases}$$

10 **En un triángulo de vértices $A(-3, 1)$, $B(-2, -2)$ y $C(1, 2)$, determina:**

a) La ecuación de la recta que contiene a la altura que pasa por C y la medida de esa altura.

b) La ecuación de la recta que contiene a la mediana que pasa por C.

c) El área del triángulo.

d) Los ángulos del triángulo.

Resolución

a) • La recta que contiene a la altura que pasa por C es perpendicular a AB.

Calculamos primero la recta r que contiene a AB:

$\overrightarrow{AB}(1, -3)$ $A(-3, 1)$

$$r: \frac{x + 3}{1} = \frac{y - 1}{-3} \rightarrow r: 3x + y + 8 = 0$$

La recta s, perpendicular a AB que pasa por C, es:

$\vec{d}_s(3, 1)$ $C(1, 2)$

$$s: \frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{1} \rightarrow s: x - 3y + 5 = 0 \leftarrow \text{Recta que contiene a la altura que pasa por } C.$$

• La medida de la altura pedida es $\overline{PC}$, donde P es el punto de intersección de las rectas r y s.

$$P = r \cap s \begin{cases} 3x + y + 8 = 0 \rightarrow y = -8 - 3x \\ x - 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} &x - 3(-8 - 3x) + 5 = 0 \rightarrow 10x + 29 = 0 \rightarrow x = -\frac{29}{10} \\ &y = -8 + 3 \cdot \frac{29}{10} = \frac{7}{10} \end{aligned}\right\} P\left(-\frac{29}{10}, \frac{7}{10}\right)$$

$$h_C = \overline{CP} = \sqrt{\left(\frac{-29}{10} - 1\right)^2 + \left(\frac{7}{10} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{1\,690}{100}} \approx 4{,}11$$

b) La mediana que pasa por C pasa también por M, punto medio del segmento AB.

$M = \left(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ $C(1, 2)$ $\overrightarrow{MC}\left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Tomamos como vector dirección (7, 5).

La ecuación de la recta que buscamos es:

$$\frac{x - 1}{7} = \frac{y - 2}{5} \rightarrow 5x - 5 = 7y - 14 \rightarrow 5x - 7y + 9 = 0$$

Resoluciones

c) Área del triángulo $= \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot h_c}{2} \approx \dfrac{\sqrt{1^2 + (-3)^2} \cdot 4{,}11}{2} \approx 6{,}5 \text{ u}^2$

d) • El ángulo α, formado por los lados AB y AC, es el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB} = (1, -3) \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{AC} = (4, 1) \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{17}$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\,|\overrightarrow{AC}|} = \frac{4-3}{\sqrt{170}} = \frac{\sqrt{170}}{170} \to \alpha = 85°\ 36'\ 4{,}66''$$

• Análogamente calculamos el ángulo β, formado por $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BA} = (-1, 3) \quad |\overrightarrow{BA}| = \sqrt{10}$

$\overrightarrow{BC} = (3, 4) \quad |\overrightarrow{BC}| = 5$

$$\cos\beta = \frac{-3+12}{5\sqrt{10}} = \frac{9}{5\sqrt{10}} \to \beta = 55°\ 18'\ 17{,}45''$$

• Al ángulo formado por $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ lo llamaremos γ:

$\overrightarrow{CA} = (-4, -1) \quad |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{17}$

$\overrightarrow{CB} = (-3, -4) \quad |\overrightarrow{CB}| = 5$

$$\cos\gamma = \frac{12+4}{5\sqrt{17}} = \frac{16}{5\sqrt{17}} \to \gamma = 39°\ 5'\ 37{,}89''$$