7. Demostración. Distancia de un punto a una recta

La distancia del punto $P(a, b)$ a la recta $r: Ax + By + C = 0$ es:

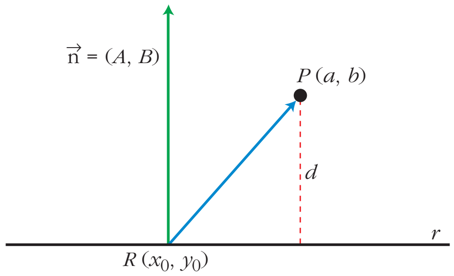
$$dist\,(P, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Demostración

Consideramos $P(a, b)$. Sea $R(x_0, y_0)$ un punto de la recta r.

Dados dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sabemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot (proy_{\vec{u}}\vec{v}) \rightarrow proy_{\vec{u}}\vec{v} = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}|}$ (1)

Llamemos $\vec{u} = \vec{n} = (A, B)$, $\vec{v} = \overrightarrow{RP} = (a - x_0, b - y_0)$.



En tal caso, $|proy_{\vec{u}}\vec{v}| = d$ = distancia de P a la recta r. Sustituyendo en (1):

$$d = |proy_{\vec{u}}\vec{v}| = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{RP}|}{|\vec{n}|} = \frac{|(A, B) \cdot (a - x_0,\ b - y_0)|}{|(A, B)|} =$$

$$= \frac{|A(a - x_0) + B(b - y_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Aa + Bb - (Ax_0 + By_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$ (pues $Ax_0 + By_0 = -C$ por ser $R(x_0, y_0)$ un punto de la recta r)

Por tanto, hemos obtenido que: $dist\,(P, r) = \dfrac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

Por ejemplo, la distancia de $P(-5, 8)$ a la recta $r: 2x - 6y + 7 = 0$ es:

$$dist\,(P, r) = \frac{|2\,(-5) - 6 \cdot 8 + 7|}{\sqrt{2^2 + (-6)^2}} = \frac{51}{\sqrt{40}}$$