1 **Halla la ecuación de la bisectriz de los ángulos formados por las siguientes rectas:**

r_1: $x = 3$

r_2: $3x - 4y + 1 = 0$

Resolución

Los puntos $X(x, y)$ deben cumplir: $dist(X, r_1) = dist(X, r_2)$

$$\left.\begin{array}{l} dist(X, r_1) = |x - 3| \\ dist(X, r_2) = \dfrac{|3x - 4y + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \end{array}\right\} \quad |x - 3| = \frac{|3x - 4y + 1|}{5}$$

Eliminando los valores absolutos obtenemos dos ecuaciones, las que corresponden a las dos bisectrices, perpendiculares entre sí:

$5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \;\rightarrow\; 2x + 4y - 16 = 0 \;\rightarrow\; x + 2y - 8 = 0$

$-5(x - 3) = 3x - 4y + 1 \;\rightarrow\; 8x - 4y - 14 = 0 \;\rightarrow\; 4x - 2y - 7 = 0$

2 **Escribe la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto $C(1, -3)$ y pasa por el punto $A(5, 0)$.**

Resolución

La ecuación de la circunferencia es de la forma $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = r^2$. Para determinar r^2, sustituimos $A(5, 0)$ en la ecuación:

$(5 - 1)^2 + 3^2 = r^2 \;\rightarrow\; r^2 = 25$

La ecuación de la circunferencia es, por tanto, $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$. O, en su forma simplificada, $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$.

3 **Consideramos la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x = 0$ y la recta r: $3x - 4y + k = 0$. Calcula los valores que debe tomar k para que r sea interior, tangente o exterior a la circunferencia.**

Resolución

Hallamos primero el centro, O_C, y el radio, R, de la circunferencia:

$x^2 + y^2 - 2x = 0 \;\rightarrow\; (x - 1)^2 + y^2 = 1 \;\rightarrow\; O_C = (1, 0)$ y $R = 1$

Calculamos la distancia del centro de la circunferencia, O_C, a la recta r: $3x - 4y + k = 0$:

$$d = dist(O_C, r) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|3 + k|}{5}$$

• Para que r sea interior a la circunferencia, ha de ser $d < R = 1$.

$$\frac{|3 + k|}{5} < 1 \;\rightarrow\; \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3 + k}{5} < 1 \;\rightarrow\; k < 2 \\ -\dfrac{3 + k}{5} < 1 \;\rightarrow\; \dfrac{3 + k}{5} > -1 \;\rightarrow\; k > -8 \end{array}\right\} \text{ Es decir, } k \in (-8, 2).$$

• Para que r sea tangente a la circunferencia, ha de ser $d = R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} = 1 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} = 1 \rightarrow k = -8 \end{cases}$$

• Para que r sea exterior a la circunferencia, ha de ser $d > R = 1$.

$$\frac{|3+k|}{5} > 1 \rightarrow \left.\begin{cases} \dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow k > 2 \\ -\dfrac{3+k}{5} > 1 \rightarrow \dfrac{3+k}{5} < -1 \rightarrow k < -8 \end{cases}\right\}$$ Es decir, $k \in (-\infty, -8) \cup (2, +\infty)$.

4 **Dados los puntos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y la recta $r: x + y - 1 = 0$, obtén las ecuaciones de:**

a) La elipse de focos F y F' cuya constante es 6.

b) La hipérbola de focos F y F' cuya constante es 2.

c) La parábola de foco F y directriz r.

☛ ***No es necesario que simplifiques la expresión de la ecuación.***

Resolución

a) Elipse de focos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y constante $k = 6$.

• Semieje mayor, a: $k = 6 = 2a \rightarrow a = 3$

• Semidistancia focal, $c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = \dfrac{\sqrt{(-2)^2 + (-4)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{20}}{2} = \sqrt{5}$

• Semieje menor, b: $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

b) Hipérbola de focos $F(3, 2)$ y $F'(1, -2)$ y constante $k = 2$.

• Semieje a: $k = 2 = 2a \rightarrow a = 1$

• Semidistancia focal, $c = \dfrac{|\overline{FF'}|}{2} = \sqrt{5}$

• $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 5 - 1 = 4 \rightarrow b = 2$

Por tanto, la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

c) Parábola de foco $F(3, 2)$ y recta directriz $r: x + y - 1 = 0$.

En una parábola de ecuación $y^2 = 2px$, $p = dist(F, r)$:

$$p = \frac{|3 + 2 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto, la ecuación de la parábola es $y = 4\sqrt{2}x$.

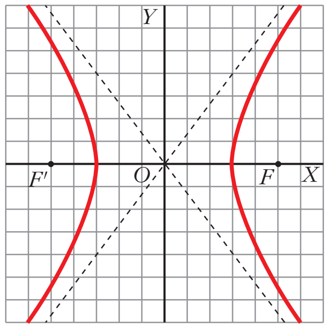
5 **Describe las siguientes cónicas. Obtén sus elementos y dibújalas:**

a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$

Resolución

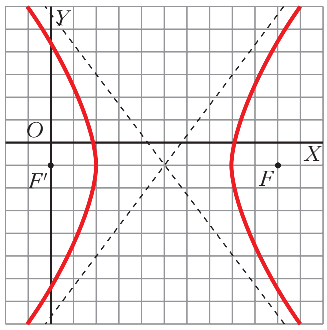
a) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



Es una hipérbola en la que:

- $a = 3$, $b = 4$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x$, $y = -\dfrac{4}{3}x$
- Semidistancia focal: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$
- Focos: $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$
- Vértices: $V(3, 0)$ y $V'(-3, 0)$

b) $\dfrac{(x-5)^2}{9} - \dfrac{(y+1)^2}{16} = 1$



Es una hipérbola igual a la del apartado anterior pero centrada en el punto $(5, -1)$.

- $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$
- Asíntotas: $y = \dfrac{4}{3}x - \dfrac{23}{3}$; $y = -\dfrac{4}{3}x + \dfrac{17}{3}$
- Focos: $F(10, -1)$, $F'(0, -1)$
- Vértices: $V(8, -1)$, $V'(2, -1)$

6 **Obtén la ecuación de la elipse de focos $F(-4, 0)$ y $F'(4, 0)$ y excentricidad 0,8.**

Resolución

$F(-4, 0)$ $F'(4, 0)$ $exc = 0{,}8$

$$c = \frac{|\overline{FF'}|}{2} = 4$$

$$exc = \frac{c}{a} = \frac{4}{a} = 0{,}8 \rightarrow a = 5$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9 \rightarrow b = 3$$

La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

7 **Halla los focos, la excentricidad y las asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 = 144$. Dibújala.**

Resolución

$9x^2 - 16y^2 = 144 \ \rightarrow\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 16 \ \rightarrow\ a = 4$

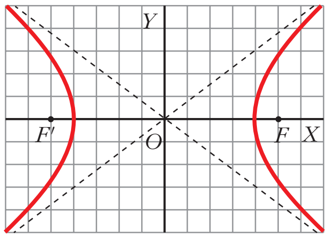
$b^2 = 9 \ \rightarrow\ b = 3$

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$

Los focos son $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$.

Excentricidad: $exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{4}$

Asíntotas: $y = \dfrac{3}{4}x$ e $y = -\dfrac{3}{4}x$



8 **Escribe la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x = 3$, y como vértice, el origen de coordenadas.**

Resolución

$d: x = 3$

En una parábola $y^2 = 2px$, la recta directriz es $x = -\dfrac{p}{2}$.

Por tanto, $3 = -\dfrac{p}{2} \ \rightarrow\ p = -6$

La ecuación de la parábola es $y^2 = -12x$.

9 **Halla el eje radical a las circunferencias:**

$$C_1: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0 \qquad\qquad C_2: x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 = 0$$

Representa las circunferencias y su eje radical.

Resolución

Sea $P(x, y)$ un punto del eje radical de ambas circunferencias. Como las potencias de P a C_1 y de P a C_2 deben coincidir:

$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 4x - 18y + 21 \ \rightarrow\ 16y = 20 \ \rightarrow\ y = \dfrac{5}{4}$

El eje radical de las circunferencias es $y = \dfrac{5}{4}$.

Para hacer la representación, calculamos el centro y el radio de cada circunferencia:

$C_1 \begin{cases} A = -4 \\ B = -2 \\ C = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} O_{C_1} &= (2, 1) \\ r &= \sqrt{4 + 1 - 1} = 2 \end{aligned}$

$C_2 \begin{cases} A = -4 \\ B = -18 \\ C = 21 \end{cases} \qquad \begin{aligned} O_{C_2} &= (2, 9) \\ r' &= \sqrt{4 + 81 - 21} = 8 \end{aligned}$