Resoluciones

1 **Identifica las siguientes cónicas, calcula sus elementos característicos y dibújalas:**

a) $x^2 - 9y^2 = 81$ **b)** $3x^2 + 3y^2 = 27$ **c)** $x^2 + 4y^2 = 16$ **d)** $y^2 - 12x = 0$

Resolución

a) $x^2 - 9y^2 = 81 \rightarrow \dfrac{x^2}{81} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

Es una hipérbola, con:

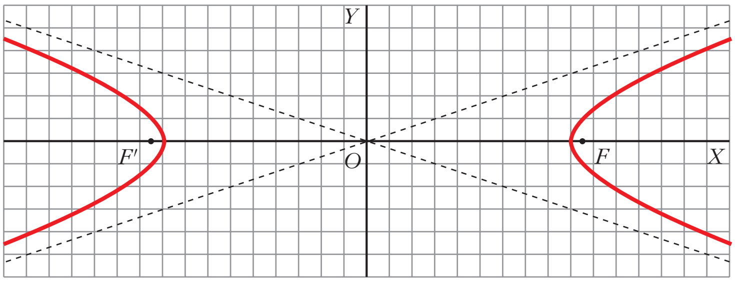
$a = 9;\ \ b = 3;\ \ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3\sqrt{10}}{9} = \dfrac{\sqrt{10}}{3} \approx 1{,}05$

Focos: $F\left(3\sqrt{10}, 0\right)\ \ F'\left(-3\sqrt{10}, 0\right)$

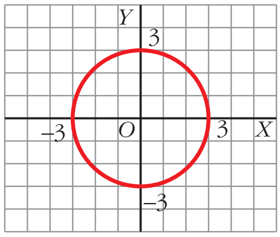
Vértices: $V(9, 0)$ y $V'(-9, 0)$

Asíntotas: $y = \dfrac{1}{3}x$ e $y = -\dfrac{1}{3}x$



b) $3x^2 + 3y^2 = 27 \rightarrow x^2 + y^2 = 9$

Es una circunferencia de centro el punto (0, 0) y radio $r = 3$.



c) $x^2 + 4y^2 = 16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

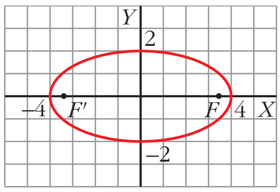
Es una elipse, en la que:

$a = 4;\ \ b = 2;\ \ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 4} = 2\sqrt{3}$

$exc = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}87$

Vértices: $(4, 0)\ \ (-4, 0)\ \ (0, 2)\ \ (0, -2)$

Focos: $F\left(2\sqrt{3}, 0\right)\ \ F'\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$



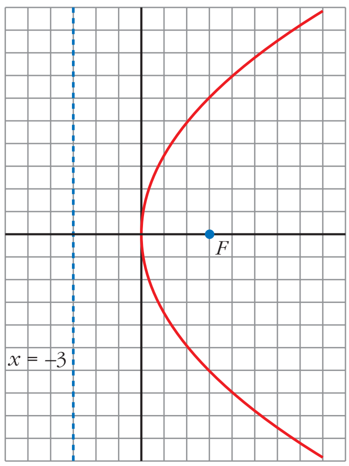
d) $y^2 - 12x = 0 \rightarrow y^2 = 12x$

Es una parábola con vértice en el punto (0, 0).

$2p = 12 \rightarrow p = 6 \rightarrow -\dfrac{p}{2} = -3$

Su recta directriz es $x = -3$.

Foco: $F(3, 0)$



Resoluciones

2 **Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(4, 1)$, $Q(-1, -4)$ y $R(2, 5)$.**

Resolución

La circunferencia es de la forma C_1: $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} P(4, 1) \in C_1 \ \rightarrow \ 16 + 1 + 4A + B + C = 0 \ \rightarrow \ 4A + B + C = -17 \\ Q(-1, -4) \in C_1 \ \rightarrow \ 1 + 16 - A - 4B + C = 0 \ \rightarrow \ -A - 4B + C = -17 \\ R(2, 5) \in C_1 \ \rightarrow \ 4 + 25 + 2A + 5B + C = 0 \ \rightarrow \ 2A + 5B + C = -29 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos $A = 2$, $B = -2$ y $C = -23$, con lo que la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 23 = 0$.

3 **Se consideran los puntos $P(2, 3)$ y $Q(4, 3)$; las rectas r: $y = 2x$ y s: $y = 1$, y las circunferencias C_1: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ y C_2: $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$.**

a) Calcula la potencia de P a C_1 y de Q a C_1. Utilízalo para calcular la posición relativa de estos dos puntos respecto a C_1.

b) Estudia la posición relativa de r y de s respecto a C_1.

c) Calcula el eje radical de C_1 y C_2.

Resolución

a) • Potencia de $P(2, 3)$ a C_1: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

Calculamos primero el centro y el radio de la circunferencia:

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0 \ \rightarrow \ (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$

Su centro es $O_1(2, 3)$, y su radio, $r_1 = 2$.

Observamos que $P(2, 3)$ es el centro de la circunferencia, por lo que $dist(P, O_1) = 0 = d_1$

$\mathcal{P} = d_1^2 - r_1^2 = 0 - 4 = -4 < 0 \ \rightarrow$ el punto P es interior a la circunferencia.

• Potencia de $Q(4, 3)$ a C_1: $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$.

$dist(Q, O_1) = \sqrt{(-2)^2 + 0} = 2 = d_2$

$\mathcal{P} = d_2^2 - r_1^2 = 4 - 4 = 0 \ \rightarrow \ Q$ es un punto de C_1.

b) • Posición de r: $2x - y = 0$ respecto a C_1.

Calculamos la distancia de O_1, centro de C_1, a la recta r:

$$dist(r, O_1) = \frac{|2 \cdot 2 - 3|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0{,}45 < r_1 = 2$$

Por tanto, la recta r es secante a C_1.

• Posición de s: $y - 1 = 0$ respecto a C_1.

$$dist(s, O_1) = \frac{|3 - 1|}{1} = 2 = r_1$$

Por tanto, la recta s es tangente a C_1.

c) Eje radical de C_1 y C_2.

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40$

$6x + 2y - 31 = 0 \ \leftarrow$ Eje radical.

Resoluciones

4 **Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que cumplen:**

a) La suma de distancias a $P(3, 0)$ y a $P'(-3, 0)$ es igual a 10.

b) La diferencia de distancias a $P(3, 0)$ y a $P'(-3, 0)$ es igual a 2.

c) Equidistan del punto (0, 5) y de la recta $y = -5$.

Resolución

a) Es una elipse de focos los puntos dados, $P(3, 0)$ y $P'(-3, 0)$, y constante $k = 10$.

$k = 2a \to a = 5$, semieje mayor.

Semidistancia focal: $c = 3$

$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$, semieje menor.

La ecuación de la elipse es $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

b) Es una hipérbola de focos los puntos dados, P y P', y constante $k = 2$.

$k = 2a \to a = 1$

Semidistancia focal: $c = 3$

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$

La ecuación de la hipérbola es $x^2 - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

c) Es una parábola de foco el punto $F(0, 5)$ y recta directriz $y = -5$.

Su ecuación será de la forma $x^2 = 2py$, en la que su recta directriz es $y = -\dfrac{p}{2}$.

$-\dfrac{p}{2} = -5 \to p = 10$

La ecuación buscada es, por tanto, $x^2 = 20y$.

5 **Halla el lugar geométrico de los puntos del plano, P, cuyo cociente de distancias al punto $A(3, 0)$ y a la recta $r: x = \dfrac{1}{3}$ es igual a 3. Es decir, $\dfrac{dist(P, A)}{dist(P, r)} = 3$.**

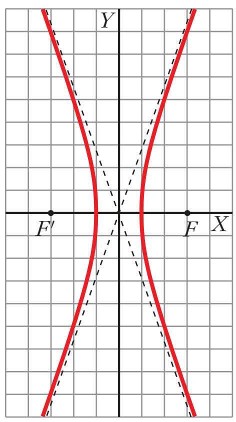
Reconoce qué tipo de curva es, describe sus elementos y represéntala.

Resolución

Sean los puntos del plano $P(x, y)$. $A(3, 0)$, $r: x - \dfrac{1}{3} = 0$. $dist(P, A) = \sqrt{(x-3)^2 + y^2}$; $dist(P, r) = \left|x - \dfrac{1}{3}\right|$

$$\frac{dist(P, A)}{dist(P, r)} = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{|x - 1/3|} = 3 \to (x-3)^2 + y^2 = \left[3\left(x - \frac{1}{3}\right)\right]^2 \to$$

$$\to x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9x^2 + 1 - 6x \to 8x^2 - y^2 = 8 \to x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$$



Es una hipérbola.

$a = 1$, $b = 2\sqrt{2}$

Semidistancia focal: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$

Focos: $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$

Asíntotas: $y = 2\sqrt{2}x$ e $y = -2\sqrt{2}x$

$exc = \dfrac{c}{a} = 3$; Vértices: $V(1, 0)$ y $V'(-1, 0)$

Resoluciones

6 **Halla la ecuación de la elipse que pasa por el punto $P(2, \sqrt{3})$ y cuyo eje mayor, de 8 unidades de longitud, está sobre el eje X.**

Resolución

Semieje mayor: $a = 4$

La ecuación de la elipse es de la forma $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Como $P(2, \sqrt{3})$ pertenece a la elipse:

$$\frac{4}{16} + \frac{3}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{b^2} = 1 \rightarrow b^2 + 12 = 4b^2 \rightarrow 3b^2 = 12 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2$$

La ecuación de la elipse es $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.

7 **Halla la ecuación de la hipérbola de focos (2, 0) y (–2, 0), y de excentricidad 2.**

Resolución

Focos: $F(2, 0)$ y $F'(-2, 0)$

Semidistancia focal: $c = 2$

$$exc = \frac{c}{a} = \frac{2}{a} = 2 \rightarrow a = 1$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

La ecuación de la hipérbola es $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.