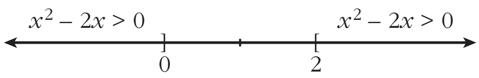
1 Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x^3 - x^2}$

Resolución

a) La función está definida para los valores de x tales que $x^2 - 2x \geq 0$.

Resolvemos la inecuación:



$Dom = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) Los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la función.

$$x^3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x-1) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array} \right.$$

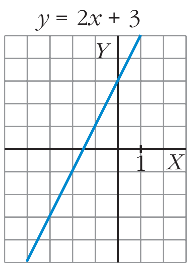
$Dom = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

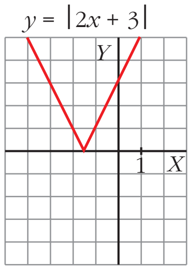
2 Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |2x + 3|$ **b)** $y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

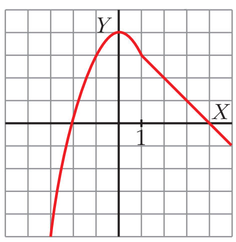
Resolución

a) La recta $y = 2x + 3$ corta al eje X en $x = -\dfrac{3}{2}$. Para valores menores que $-\dfrac{3}{2}$, cambiamos el signo de la ordenada. Por ejemplo: $(-2, -1) \rightarrow (-2, 1)$.





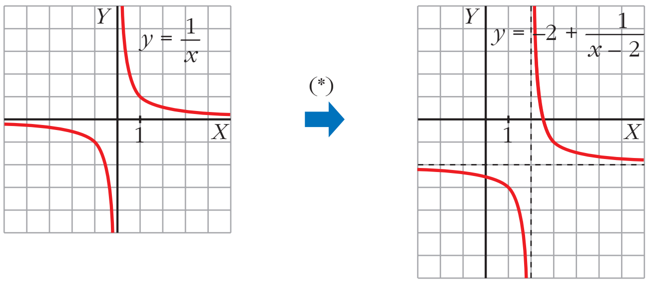
b) Para valores menores que 1, la gráfica es una parábola de vértice (0, 4). Para valores mayores que 1, es una recta.



3 **Representa $y = \frac{1}{x}$. A partir de ella, dibuja la gráfica de $y = \frac{-2x+5}{x-2}$.**

Resolución

$$\begin{array}{r|l} -2x+5 & x-2 \\ \cline{2-2} 2x-4 & -2 \\ \hline 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{-2x+5}{x-2} = -2 + \frac{1}{x-2}$$



(*) La gráfica de $y = \frac{-2x+5}{x-2}$ es como la de $y = \frac{1}{x}$ trasladada 2 unidades a la derecha y 2 unidades hacia abajo.

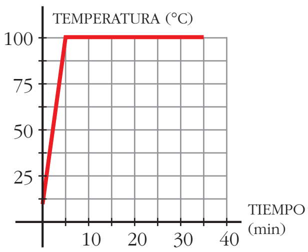
4 **Ponemos al fuego un cazo con agua a 10 °C. En 5 minutos alcanza 100 °C y se mantiene así durante media hora, hasta que el agua se evapora totalmente.**

a) Representa la función que describe este fenómeno y halla su expresión analítica.

b) Di cuál es su dominio y su recorrido.

Resolución

a)



- La gráfica pasa por los puntos (0, 10) y (5, 100).
- Hallamos la ecuación de esta recta:

$$\text{Pendiente: } \frac{100-10}{5-0} = 18 \rightarrow y = 18(x-0)+10$$

- Para valores de x mayores que 5, la temperatura se mantiene constante $\rightarrow y = 100$

$$\text{Expresión analítica: } f(x) = \begin{cases} 18x + 10 & \text{si } 0 \le x < 5 \\ 100 & \text{si } 5 \le x \le 35 \end{cases}$$

b) Dominio: $f(x)$ está definida para valores de x entre 0 y 35, ambos incluidos. Por tanto, $Dom\, f = [0, 35]$.

Recorrido de $f = [10, 100]$

5 **El precio de venta de un artículo viene dado por la expresión $p = 12 - 0{,}01x$ (x = número de artículos fabricados; p = precio, en cientos de euros).**

a) Si se fabrican y se venden 500 artículos, ¿cuáles serán los ingresos obtenidos?

b) Representa la función *nº de artículos-ingresos*.

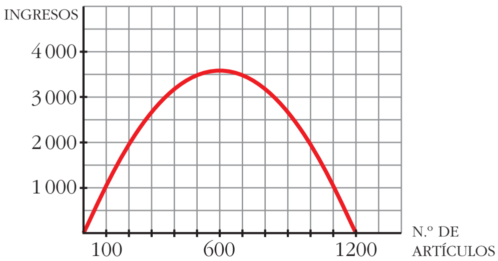
c) ¿Cuántos artículos se deben fabricar para que los ingresos sean máximos?

Resolución

a) Si se venden 500 artículos, su precio será:

$$p(500) = 12 - 0{,}01 \cdot 500 = 7 \text{ cientos de euros} \rightarrow \text{Ingresos} = 500 \cdot 700 = 350\,000 \text{ €}$$

b) $I(x) = p \cdot x = 12x - 0{,}01x^2$



c) Hallamos el vértice de la parábola: $\begin{cases} x = \dfrac{12}{-0{,}02} = 600 \text{ artículos} \\ y = 12 \cdot 600 - 0{,}01 \cdot 600^2 = 3\,600 \text{ cientos de euros} \end{cases}$

Deben fabricar 600 artículos para obtener unos ingresos máximos (360 000 euros).

6 **Depositamos en un banco 5 000 € al 6% anual.**

a) Escribe la función que nos dice cómo evoluciona el capital a lo largo del tiempo. ¿Qué tipo de función es?

b) ¿En cuánto tiempo se duplicará el capital?

Resolución

a) $C = 5\,000\left(1 + \dfrac{6}{100}\right)^t \rightarrow C = 5\,000\,(1{,}06)^t$. Es una función exponencial creciente, por ser $a > 1$.

b) $10\,000 = 5\,000 \cdot 1{,}06^t \rightarrow 2 = 1{,}06^t \rightarrow \log 2 = t \log 1{,}06 \rightarrow t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}9$

Tardará 12 años en duplicarse.

7 **Dadas $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$, halla:**

a) $f[g(2)]$ **b) $g[f(15)]$** **c) $f \circ g$** **d) $g \circ f$**

Resolución

a) $f[g(2)] = f\left(\dfrac{1}{2-3}\right) = f(-1) = \sqrt{-1+1} = 0$

b) $g[f(15)] = g\left(\sqrt{15+1}\right) = g(4) = \dfrac{1}{4-3} = 1$

c) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x-3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x-3} + 1} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x-3}}$

d) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(\sqrt{x+1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - 3}$