1 **Calcula el límite de $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ en los puntos de abscisas 0, 3 y 5.**

Di si la función es continua en esos puntos.

Resolución

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \le 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{array} \right\} \text{No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límite en ese punto.

2 **Halla los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2}$

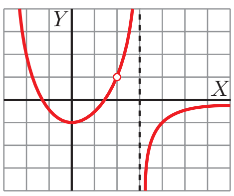
Resolución

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

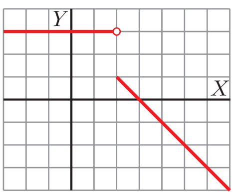
b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos.)

3 a)



b)



Sobre la gráfica de estas dos funciones, halla, en cada caso, los siguientes límites

$\lim\limits_{x \to 3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

Resolución

a) $$\lim_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1 \end{cases}$ No tiene límite en $x = 2$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 3$

4 **Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.**

Resolución

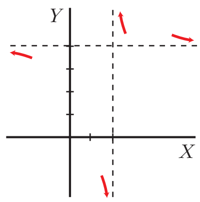
Simplificamos: $\dfrac{4x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{4x}{x - 2} \rightarrow y = \dfrac{4x}{x - 2}$

- Asíntota vertical: $x = 2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x - 2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x - 2} = +\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x - 2} = 4; \; y = 4$

Posición $\begin{cases} x \rightarrow +\infty, & y > 4 \\ x \rightarrow -\infty, & y < 4 \end{cases}$



5 **Justifica qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Resolución

$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \le 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{cases}$

Para que exista el límite, debe ser:

$a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$

6 **Halla el límite de $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ cuando $x \to 3$; $x \to 2$; $x \to +\infty$; $x \to -\infty$ y representa la información que obtengas.**

Resolución

- $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \dfrac{0}{0}$

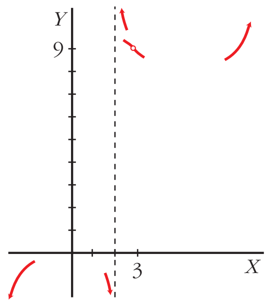
  Simplificamos: $\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \dfrac{x^2}{x-2}$

  $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2}{x-2} = 9$

- $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2}{x-2}$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = +\infty$

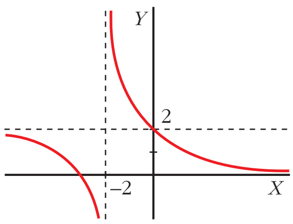
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x-2} = -\infty$



7 **Representa una función que cumpla las siguientes condiciones:**

$\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$

Resolución



8 **Estudia las ramas infinitas de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2 + 4}$ y sitúa la curva respecto a su asíntota.**

Resolución

No tiene asíntotas verticales porque $x^2 + 4 \neq 0$ para cualquier valor de x.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2 + 4} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2 + 4} = -\infty$.

Tiene una asíntota oblicua, porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

$$\begin{array}{rl} 2x^3 & \underline{|\ x^2 + 4} \\ -2x^3 - 8x & \ \ 2x \\ \hline -8x & \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2 + 4} = 2x - \frac{8x}{x^2 + 4}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Posición $\left\langle \begin{array}{ll} x \to +\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \end{array} \right.$