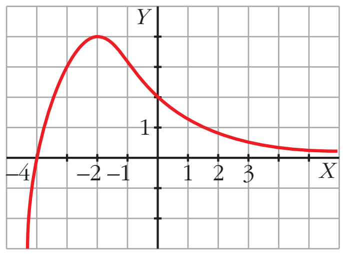
1 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y responde.**



a) ¿Cuál es la T.V.M. en los intervalos [0, 3] y [–4, –2]?

b) ¿Tiene algún punto de tangente horizontal?

c) ¿Para qué valores de x es $f'(x) > 0$?

d) Sabemos que la tangente en el punto de abscisa $x = 0$ es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. ¿Cuánto vale $f'(0)$?

Resolución

a) $\text{T.V.M. } [0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

$\text{T.V.M. } [-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriz del 2.º cuadrante) tiene pendiente igual a –1. Por tanto, $f'(0) = -1$.

2 **Dada $f(x) = x^2 - 3x$, prueba que $f'(-2) = -7$ aplicando la definición de derivada.**

Resolución

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$$\frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \frac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$$

$$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$$

Por tanto, $f'(-2) = -7$.

3 **Halla la derivada de las siguientes funciones:**

a) $y = \sqrt{x} + \dfrac{2}{x}$ **b)** $y = \dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}$ **c)** $y = \cos^2 \pi x$ **d)** $y = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

Resolución

a) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2}{x^2}$

b) $f'(x) = \frac{1}{3}e^{-x} + \frac{x}{3}(-1)e^{-x} = e^{-x}\left(\frac{1-x}{3}\right)$

c) $f'(x) = 2\pi\ cos\ \pi\ x(-sen\ \pi x) = -2\pi\ cos\ \pi x \cdot sen\ \pi x$

d) $f'(x) = 3\left(\frac{x^2}{x-2}\right)^2 D\left(\frac{x^2}{x-2}\right) = 3\ \frac{x^4}{(x-2)^2} \cdot \frac{2x(x-2)-x^2}{(x-2)^2} = \frac{3x^4(x^2-4x)}{(x-2)^4}$

4 **Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = ln\ x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$.**

Resolución

Punto de tangencia: $x = 1$, $y = ln\ 1^2 = 0 \ \rightarrow\ P(1, 0)$

Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x} \ \rightarrow\ f'(1) = 2$

Ecuación: $y = 0 + 2(x-1) \ \rightarrow\ y = 2x - 2$

5 **Halla los puntos singulares de la función $y = 2 + (1-x)^3$. ¿Tiene máximo o mínimo relativo esa función?**

Resolución

$f(x) = 2 + (1-x)^3 \ \rightarrow\ f'(x) = 3(1-x)^2(-1) = -3(1-x)^2$

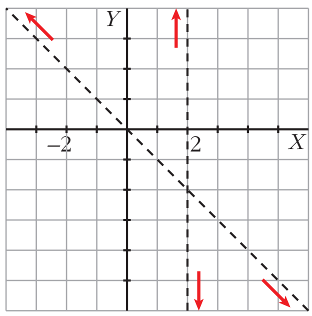
$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ -3(1-x)^2 = 0 \ \rightarrow\ 1 - x = 0 \ \rightarrow\ x = 1$

$f(1) = 2 + (1-1)^3 = 2$

Punto singular: (1, 2)

Como $f'(x) = -3(1-x)^2$ es menor que 0 para cualquier valor de $x \neq 1$, f es decreciente en todo su dominio y, por tanto, el punto singular no es máximo ni mínimo.

6 **Determina los puntos singulares de $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$ de la cual conocemos sus asíntotas y la posición de la curva con respecto a ellas. Represéntala.**



Resolución

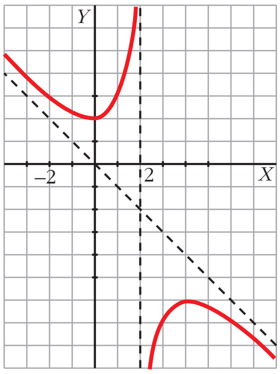
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$$

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(2-x) - (x^2-2x+4)(-1)}{(2-x)^2} = \frac{(4x - 2x^2 - 4 + 2x) + (x^2 - 2x - 4)}{(2-x)^2} = \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow\ \frac{-x^2+4x}{(2-x)^2} = 0 \ \rightarrow\ -x^2 + 4x = 0 \ \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$f(0) = \frac{0 - 0 + 4}{2 - 0} = 2;\ f(4) = \frac{4^2 - 2 \cdot 4 + 4}{2 - 4} = -6$$

Los puntos singulares son (0, 2) y (4, –6). El primero es un mínimo y el segundo, un máximo.



7 **Representa la función $y = x^3 - 12x + 16$.**

Resolución

$y = x^3 - 12x + 16$ es una función polinómica, por ello es continua en $\mathbb{R}$.

- Ramas infinitas:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

- Puntos singulares:

$f'(x) = 3x^2 - 12$

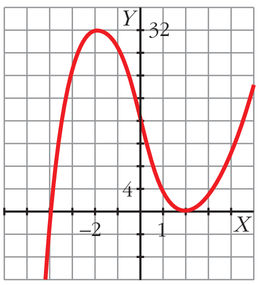
$f'(x) = 0 \to 3x^2 - 12 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right.$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 16 = 0 \to (2, 0)$

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \to (-2, 32)$

Los puntos singulares son (2, 0) y (–2, 32).

Esta es su gráfica:



8 **Estudia y representa $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.**

Resolución

$f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

Dominio de definición: $\mathbb{R} - \{0\}$

Asíntota vertical: $x = 0$. Posición $\begin{cases} x \to 0^-, & f(x) \to -\infty \\ x \to 0^+, & f(x) \to -\infty \end{cases}$

Asíntota horizontal:

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{x^2} = 1$; $y = 1$. Posición $\begin{cases} x \to +\infty, & f(x) < 1 \\ x \to -\infty, & f(x) < 1 \end{cases}$

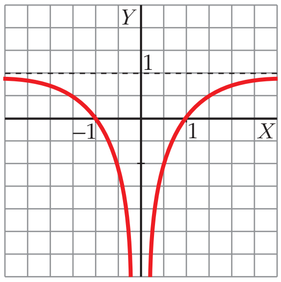
Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{2x\,x^2 - (x^2 - 1)\,2x}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$f'(x) = 0 \;\to\; \dfrac{2}{x^3} = 0$. No tiene solución.

No tiene puntos singulares.

Esta es su gráfica:

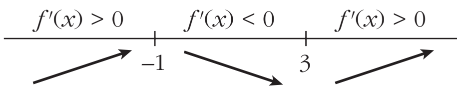


9 **Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.**

Resolución

$f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x \;\to\; f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Buscamos los valores de x para los que $f'(x) > 0 \;\to\; x^2 - 2x - 3 > 0$



Intervalos de crecimiento de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento de f: $(-1, 3)$

La función tiene un máximo en $x = -1$ y un mínimo en $x = 3$.