



AXIOMAS

Axioma 1. Cualquiera que sea el suceso S , $P[S] \geq 0$.

Axioma 2. Si dos sucesos son incompatibles, la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P[A \cup B] = P[A] + P[B]$$

Axioma 3. La probabilidad total es 1: $P[E] = 1$

Teorema 1

Si A es un suceso y A' es su contrario, $P[A'] = 1 - P[A]$

Demostración

Por ser sucesos contrarios, $A \cap A' = \emptyset$. Y, por lo mismo, $A \cup A' = E$.

Según el axioma 2, como $A \cap A' = \emptyset \Rightarrow P[A \cup A'] = P[A] + P[A']$.

Según el axioma 3, la probabilidad total es 1; es decir:

$$P[E] = P[A \cup A'] = P[A] + P[A'] = 1$$

Y de esta última igualdad se deduce, inmediatamente, que $P[A'] = 1 - P[A]$.

Teorema 2

La probabilidad del suceso vacío o suceso imposible es $P[\emptyset] = 0$.

Demostración

El suceso contrario de \emptyset es el suceso seguro, E . Así, teniendo en cuenta el teorema 1:

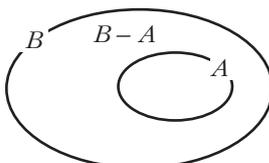
$$P[\emptyset] = 1 - P[\emptyset'] = 1 - P[E]$$

Y aplicando el axioma 3, $P[\emptyset] = 1 - P[E] = 1 - 1 = 0$

Teorema 3

Si dos sucesos A y B son tales que $A \subset B$, entonces $P[B] = P[A] + P[B - A]$.

Demostración



Si $A \subset B$, entonces $B = A \cup (B - A)$.

Los sucesos A y $B - A$ son, evidentemente, incompatibles, $A \cap (B - A) = \emptyset$.

Por tanto, teniendo en cuenta el axioma 2:

$$P[B] = P[A] + P[B - A]$$



Teorema 4

Si dos sucesos A y B son tales que $A \subset B$, entonces $P[A] \leq P[B]$

Demostración

Puesto que $A \subset B$, aplicando el teorema 3 anterior:

$$P[B] = P[A] + P[B - A] \rightarrow P[B] - P[A] = P[B - A]$$

Teniendo en cuenta el axioma 1, $P[B - A] \geq 0$. Es decir, $P[B] - P[A] \geq 0 \rightarrow P[B] \geq P[A]$

Teorema 5

Si A_1, A_2, \dots, A_k , son incompatibles dos a dos, entonces:

$$P[A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k] = P[A_1] + P[A_2] + \dots + P[A_k]$$

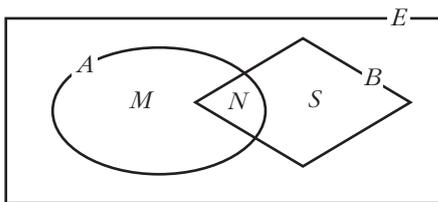
Demostración

Es consecuencia inmediata del axioma 2 y de las propiedades asociativas de la unión de conjuntos y de la adición de números reales.

Teorema 6

Dados dos sucesos cualesquiera A y B , $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$.

Demostración



$$A = M \cup N$$

$$B = N \cup S$$

$$A \cup B = M \cup N \cup S$$

$$A \cap B = N$$

$$\left. \begin{array}{l} P[A] = P[M] + P[N] \\ P[B] = P[N] + P[S] \end{array} \right\} P[A] + P[B] = P[M] + P[N] + P[N] + P[S] (*)$$

$$P[A \cup B] = P[M \cup N \cup S] = P[M] + P[N] + P[S] (**)$$

Comparando las igualdades (*) y (**): $P[A] + P[B] - P[N] = P[A \cup B]$

Con lo que, si tenemos en cuenta que $N = A \cap B$, se tiene la igualdad buscada.

Teorema 7

Si el espacio muestral E es finito y un suceso es $S = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, entonces:

$$P[S] = P[x_1] + P[x_2] + \dots + P[x_k]$$

Demostración

Este teorema es consecuencia inmediata del teorema 5.