

### 1 De entre las ecuaciones siguientes:

$$33x^2 - 25x + 2 = 0$$

$$2x^2 - 4 = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$9x^2 + 4 = 0$$

a) Señala las que no tienen soluciones en  $\mathbb{Q}$ .

b) ¿Cuáles tienen solución en  $\mathbb{R}$ ?

#### Resolución

Resolvemos las ecuaciones:

$$33x^2 - 25x + 2 = 0 \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ x = \frac{1}{11} \end{cases}$$

$$2x^2 - 4 = 0 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

$$9x^2 + 4 = 0 \text{ no tiene solución.}$$

a) No tienen solución en  $\mathbb{Q}$ :  $2x^2 - 4 = 0$ ;  $x^2 + x - 1 = 0$ ;  $9x^2 + 4 = 0$

b) Todas tienen solución en  $\mathbb{R}$  salvo  $9x^2 + 4 = 0$ .

### 2 Compara $\sqrt[3]{87}$ y $\sqrt[4]{386}$ reduciéndolas a índice común.

#### Resolución

$$\sqrt[3]{87} = \sqrt[12]{87^4} = \sqrt[12]{57289761}$$

$$\sqrt[4]{386} = \sqrt[12]{386^3} = \sqrt[12]{57512456}$$

$$\sqrt[4]{386} > \sqrt[3]{87}$$

### 3 Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a)  $\sqrt{a^3} - 2a\sqrt{a^2} + 3a\sqrt{a^3} - \sqrt{a^{12}}$

b)  $\frac{\sqrt{98} - \sqrt{18}}{\sqrt{96}} \cdot 30\sqrt{3}$

c)  $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

d)  $\frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6} + 3\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

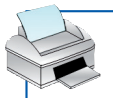
#### Resolución

a)  $a\sqrt{a} - 2a\sqrt{a} + 3a\sqrt{a} - a\sqrt{a} = a\sqrt{a}$

b)  $\frac{7\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \frac{4\sqrt{2}}{4\sqrt{6}} \cdot 30\sqrt{3} = \frac{30\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = 30$

c)  $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

d)  $\frac{5}{\sqrt{6}} + \frac{2(\sqrt{6} - 3\sqrt{2})}{(\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2} - \frac{4\sqrt{2}\sqrt{3}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{2\sqrt{6} - 6\sqrt{2}}{12} - \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6}}{6} - \frac{\sqrt{6} - 3\sqrt{2}}{6} - \frac{4\sqrt{6}}{3} = \frac{5\sqrt{6} - \sqrt{6} + 3\sqrt{2} - 8\sqrt{6}}{6} = \frac{3\sqrt{2} - 4\sqrt{6}}{6}$



- 4** Expresa el resultado de la siguiente operación con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometido:

$$(5 \cdot 10^{-18})(3,52 \cdot 10^{15}) : (-2,18 \cdot 10^{-7})^2$$

**Resolución**

$$3,70 \cdot 10^{11}$$

$$|\text{Error absoluto}| < 0,005 \cdot 10^{11} = 5 \cdot 10^8$$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{5 \cdot 10^8}{3,70 \cdot 10^{11}} = 1,35 \cdot 10^{-3}$$

- 5** Si  $\log k = -1,3$  calcula el valor de las siguientes expresiones:

a)  $\log k^3$

b)  $\log \frac{1}{k}$

c)  $\log \frac{k}{100}$

**Resolución**

a)  $\log k^3 = 3 \log k = 3(-1,3) = -3,9$

b)  $\log \frac{1}{k} = \log 1 - \log k = 0 - (-1,3) = 1,3$

c)  $\log \frac{k}{100} = \log k - \log 100 = -1,3 - 2 = -3,3$

- 6** Halla  $x$  en cada caso:

a)  $|7 - 3x| = 2$

b)  $|x^2 - 3| = 1$

**Resolución**

$$\text{a) } |7 - 3x| = 2 \begin{cases} 7 - 3x = 2 \rightarrow x = \frac{5}{3} \\ 7 - 3x = -2 \rightarrow x = 3 \end{cases}$$

Soluciones:  $x_1 = \frac{5}{3}$ ;  $x_2 = 3$

$$\text{b) } |x^2 - 3| = 1 \begin{cases} x^2 - 3 = 1 \rightarrow x^2 = 4 \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ x^2 - 3 = -1 \rightarrow x^2 = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \end{cases}$$

Soluciones:  $x_1 = 2$ ;  $x_2 = -2$ ;  $x_3 = \sqrt{2}$ ;  $x_4 = -\sqrt{2}$

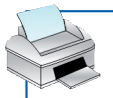
- 7** Calcula  $x$  para que  $2^{x+1} = 3^x$ .

**Resolución**

$$2^{x+1} = 3^x \rightarrow (x+1) \log 2 = x \log 3 \rightarrow x \log 2 - x \log 3 = -\log 2$$

$$x(\log 2 - \log 3) = -\log 2 \rightarrow x = \frac{-\log 2}{\log 2 - \log 3} = 1,71$$

Solución:  $x = 1,71$



- 8** Calcula la suma de los doce primeros términos de una progresión aritmética de la que conocemos  $a_3 = 24$  y  $a_2 + a_{11} = 41$ .

**Resolución**

$$\left. \begin{aligned} a_3 = 24 &\rightarrow a_1 + 2d = 24 \\ a_2 + a_{11} = 41 &\rightarrow a_1 + d + a_1 + 10d = 41 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_1 + 2d = 24 \\ 2a_1 + 11d = 41 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} d &= -1 \\ a_1 &= 26 \end{aligned}$$

$$S_{12} = \frac{a_1 + a_{12}}{2} \cdot 12 = \frac{26 + (26 - 11)}{2} \cdot 12 = 246$$

- 9** Si al comienzo de cada año ingresamos 500 € en un banco al 4% anual, ¿cuánto dinero tendremos al final del quinto año?

**Resolución**

1.º año	2.º año	3.º año	4.º año	5.º año
500	—————→			$500 \cdot 1,04^5$
	500	—————→		$500 \cdot 1,04^4$
		500	—————→	$500 \cdot 1,04^3$
			500	—————→ $500 \cdot 1,04^2$
				500 ———→ $\frac{500 \cdot 1,04}{\text{Capital}}$

El capital disponible al final del 5.º año es la suma de los 5 primeros términos de una progresión geométrica con  $a_1 = 500 \cdot 1,04$  y razón  $r = 1,04$ :

$$S = \frac{a_5 r - a_1}{r - 1} = \frac{500 \cdot 1,04^5 \cdot 1,04 - 500 \cdot 1,04}{1,04 - 1} = 2816,49 \text{ €}$$

- 10** Estudia el comportamiento de las siguientes sucesiones para términos avanzados e indica su límite:

$$a_n = \frac{3}{n^2}$$

$$b_n = 5 - \frac{1}{n}$$

$$c_n = \frac{n^2 + 1}{n}$$

$$d_n = \frac{4n - 5}{2n + 1}$$

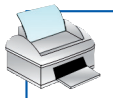
**Resolución**

$$a_n = \frac{3}{n^2}; a_{100} = 0,0003; a_{1000} = 0,000003 \rightarrow \lim \frac{3}{n^2} = 0$$

$$b_n = 5 - \frac{1}{n}; b_{100} = 4,99; b_{1000} = 4,999 \rightarrow \lim 5 - \frac{1}{n} = 5$$

$$c_n = \frac{n^2 + 1}{n}; c_{100} = 100,01; c_{1000} = 1000,01 \rightarrow \lim \frac{n^2 + 1}{n} = +\infty$$

$$d_n = \frac{4n - 5}{2n + 1}; d_{100} = 1,965; d_{1000} = 1,997 \rightarrow \lim \frac{4n - 5}{2n + 1} = 2$$



**11** Simplifica la expresión del término general de la siguiente sucesión e indica su límite:

$$a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$

**Resolución**

Suma de 1, 2, 3, ..., n es  $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n+n^2}{2}$

$$a_n = \frac{\frac{n+n^2}{2}}{n^2} = \frac{n+n^2}{2n^2} \rightarrow \lim \frac{n+n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

**12** Factoriza los siguientes polinomios:

a)  $x^3 - 9x$

b)  $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2$

**Resolución**

a)  $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = x(x+3)(x-3)$

b)  $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = x^2(3x^3 - 4x^2 - 5x + 2) = x^2(x+1)(x-2)(3x-1)$

	3	-4	-5	2
-1		-3	7	-2
	3	-7	2	0
2		6	-2	
	3	-1	0	

**13** Simplifica:  $\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1}$

**Resolución**

$$\frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} = \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1}$$

**14** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)  $(x+4)^2 - 7 = (2x+3)^2 + 2x$

b)  $2x^4 - 3x^2 - 2 = 0$

c)  $\sqrt{2x+3} - 2x = x - 6$

d)  $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 = 0$

**Resolución**

a)  $x^2 + 16 + 8x - 7 = 4x^2 + 9 + 12x + 2x$

$$3x^2 + 6x = 0 \rightarrow 3x(x+2) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Soluciones:  $x_1 = 0, x_2 = -2$

b) Hacemos el cambio  $x^2 = z \rightarrow 2z^2 - 3z - 2 = 0 \rightarrow z = \frac{3 \pm 5}{4} \begin{cases} z = 2 \\ z = -\frac{1}{2} \text{ no vale} \end{cases}$

Si  $z = 2 \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases}$

Soluciones:  $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$



c)  $\sqrt{2x+3} - 2x = x - 6$

$$\sqrt{2x+3} = x - 6 + 2x \rightarrow (\sqrt{2x+3})^2 = (3x-6)^2$$

$$2x+3 = 9x^2 + 36 - 36x \rightarrow 9x^2 - 38x + 33 = 0$$

$$x = \frac{38 \pm 16}{18} \begin{cases} x = 3 \\ x = \frac{11}{9} \end{cases}$$

Comprobamos las soluciones:

$$x = 3 \rightarrow \sqrt{2 \cdot 3 + 3} - 2 \cdot 3 = 3 - 6 \text{ Vale}$$

$$x = \frac{11}{9} \rightarrow \sqrt{2 \cdot \frac{11}{9} + 3} - 2 \cdot \frac{11}{9} = \frac{11}{9} - 6 \rightarrow \frac{7}{3} - \frac{22}{9} \neq -\frac{43}{9}$$

La solución es  $x = 3$ .

d)  $3x^5 - 4x^4 - 5x^3 + 2x^2 \stackrel{(*)}{=} x^2(x+1)(x-2)(3x-1) = 0$

(\*) Ejercicio 12 b)

Soluciones:  $x_1 = 0$ ;  $x_2 = -1$ ;  $x_3 = 2$ ;  $x_4 = \frac{1}{3}$

### 15 Resuelve los siguientes sistemas:

a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases}$       b)  $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases}$

**Resolución**

a)  $\begin{cases} x + y = 3 \\ xy + x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 - x \\ x(3 - x) + x = 0 \rightarrow 3x - x^2 + x = 0 \end{cases}$

$$-x^2 + 4x = 0 \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow y_1 = 3 \\ x_2 = 4 \rightarrow y_2 = -1 \end{cases}$$

Soluciones: (0, 3) y (4, -1)

b)  $\begin{cases} x + 1 > 3 \\ 2x - 1 \leq 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 2x \leq 10 \rightarrow x \leq 5 \end{cases}$



Soluciones:  $x \in (2, 5]$

### 16 Opera y simplifica:

$$\left( \frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x} \right) - (x^2 - 3x)$$

**Resolución**

$$\begin{aligned} \left( \frac{x^2 - 4}{x + 1} : \frac{x^2 + 2x}{x^3 - x} \right) - (x^2 - 3x) &= \frac{(x^2 - 4)(x^3 - x)}{(x + 1)(x^2 + 2x)} - (x^2 - 3x) = \frac{(x + 2)(x - 2)x(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)x(x + 2)} - (x^2 - 3x) = \\ &= (x - 2)(x - 1) - (x^2 - 3x) = x^2 - 3x + 2 - x^2 + 3x = 2 \end{aligned}$$



### 17 Resuelve:

a)  $\frac{7-x}{x^2+4x+4} + \frac{x}{x+2} = 1$     b)  $3^{x^2-2} = \frac{1}{3}$     c)  $4^{2x} - 2 \cdot 4^{x+1} + 16 = 0$     d)  $\log(x+1) = 1 + \log x$

#### Resolución

a)  $\frac{7-x}{(x+2)^2} + \frac{x}{x+2} = 1 \rightarrow \frac{7-x+x(x+2)}{(x+2)^2} = 1 \rightarrow 7-x+x^2+2x = x^2+4x+4 \rightarrow 3x-3=0 \rightarrow x=1$

Solución:  $x=1$

b)  $3^{x^2-2} = \frac{1}{3} = 3^{-1} \rightarrow x^2-2 = -1 \rightarrow x^2 = 1 \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Soluciones:  $x_1=1, x_2=-1$

c)  $(4^x)^2 - 2 \cdot 4^x \cdot 4 + 16 = 0 \xrightarrow{\text{cambio } 4^x=t} t^2 - 8t + 16 = 0 \rightarrow (t-4)^2 = 0 \rightarrow t=4 \rightarrow 4^x = 4 \rightarrow x=1$

Solución:  $x=1$

d)  $\log(x+1) - \log x = 1 \rightarrow \log \frac{x+1}{x} = 1 \rightarrow \frac{x+1}{x} = 10 \rightarrow x+1 = 10x \rightarrow 9x = 1 \rightarrow x = \frac{1}{9}$

Solución:  $x = \frac{1}{9}$

### 18 Resuelve los siguientes sistemas:

a)  $\begin{cases} x-4y=5 \\ \log(x+1) = 1 + \log y \end{cases}$     b)  $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ -2x+y-z=-5 \\ 3x-y+3z=10 \end{cases}$

#### Resolución

a)  $\left. \begin{matrix} x-4y=5 \\ \log(x+1) - \log y = 1 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} x-4y=5 \\ \frac{x+1}{y} = 10 \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} x-4y=5 \\ x+1=10y \end{matrix} \right\} \rightarrow \left. \begin{matrix} -x+4y=-5 \\ x-10y=-1 \end{matrix} \right\} \rightarrow -6y = -6 \rightarrow y=1$

$-x+4y = -5 \rightarrow -x+4 = -5 \rightarrow x=9$

Solución:  $x=9, y=1$

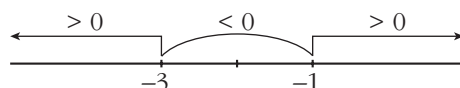
b)  $\left. \begin{matrix} x+2y+z=1 \\ -2x+y-z=-5 \\ 3x-y+3z=10 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \xrightarrow{1 \cdot a} \\ \xrightarrow{2 \cdot a + 2 \cdot 1 \cdot a} \\ \xrightarrow{3 \cdot a - 3 \cdot 1 \cdot a} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} x+2y+z=1 \xrightarrow{\quad\quad\quad} x=1 \\ 5y+z=-3 \xrightarrow{\quad\quad\quad} z=2 \\ -7y=7 \xrightarrow{\quad\quad\quad} y=-1 \end{matrix} \right.$

Solución:  $x=1, y=-1, z=2$

### 19 Resuelve: $x^2 + 4x + 3 \geq 0$

#### Resolución

$x^2 + 4x + 3 \geq 0 \quad x^2 + 4x + 3 = 0 \begin{cases} x=-1 \\ x=-3 \end{cases}$



Soluciones:  $(-\infty, -3] \cup [-1, +\infty)$



- 20** Un grifo A tarda en llenar un depósito el doble de tiempo que otro B. Abiertos simultáneamente, llenan el depósito en dos horas. ¿Cuánto tarda cada grifo por separado?

**Resolución**

$x$ : tiempo que tarda B en llenar el depósito

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2x} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{2 + 1}{2x} = \frac{x}{2x} \rightarrow x = 3 \text{ horas}$$

B tarda 3 horas y A tarda 6 horas.