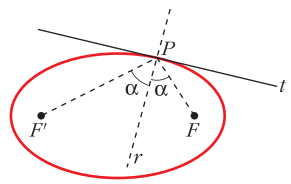
Soluciones de los ejercicios

PROPIEDADES Y CURIOSIDADES DE LAS CÓNICAS

1. **Lewis Carroll, el matemático autor de *"Alicia en el País de las Maravillas"*, se construyó una mesa de billar de forma elíptica. En ella, si una bola pasa por un foco, sin efecto, pasará necesariamente por el otro foco después de rebotar. Y así, sucesivamente, hasta que se pare. Explica por qué.**



Llamamos P al punto en el que rebota la bola que ha pasado por F. Hemos visto que si t es tangente a la elipse en P, entonces t es la bisectriz exterior de los radios rectores PF y PF'. Llamamos r a la otra bisectriz. Tenemos que el ángulo formado por r y PF' coincide con el ángulo formado por r y PF. Por tanto, la bola que pase por F, necesariamente pasará por el otro foco, F', al rebotar.

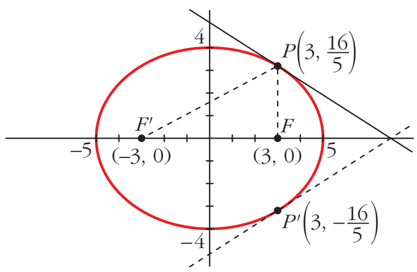
2. **A veces, en el andén del metro se produce el siguiente fenómeno: una persona oye hablar a otra con absoluta nitidez, pero no la encuentra cerca. Mirando a su alrededor, llega a descubrir que la voz procede de alguien que está en el andén de enfrente y que no está hablando más fuerte que los demás. Explica a qué se debe este hecho, partiendo de que la bóveda del andén es semielíptica.**

La boca de la persona que habla está situada sobre uno de los focos de la elipse y una oreja de la persona que escucha está en el otro foco.

Una gran cantidad de sonido que emite la primera persona, tras chocar en la bóveda, va a parar a la oreja de la segunda. Esta recibe una cantidad de sonido muy superior a la que cabía esperar. Por eso da la impresión de que el emisor está más cerca.

3. **Halla la ecuación de la tangente a la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ en los puntos de abscisa 3.**

☛ ***Utiliza el hecho de que la recta tangente es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores. De las dos bisectrices, tendrás que elegir la adecuada.***



Los focos de la elipse son $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$. Hallamos los puntos de abscisa $x = 3$:

$$\frac{9}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad\to\quad y = \pm\frac{16}{5}$$

Hay dos puntos: $P\left(3, \dfrac{16}{5}\right)$ y $P'\left(3, -\dfrac{16}{5}\right)$.

• Para $P\left(3, \dfrac{16}{5}\right)$: Obtenemos las bisectrices de los ángulos formados por las rectas que pasan por PF y por PF':

— recta, r_1, que pasa por PF $\to$ $x = 3$ $\to$ $x - 3 = 0$

— recta, r_2, que pasa por PF' $\to$ $m = \dfrac{8}{15}$ $\to$ $y = \dfrac{8}{15}(x + 3)$ $\to$ $8x - 15y + 24 = 0$

Bisectrices: $dist\big((x, y), r_1\big) = dist\big((x, y), r_2\big)$

$$|x - 3| = \frac{|8x - 15y + 24|}{17}$$

Soluciones de los ejercicios

$$\begin{cases} 17x - 51 = 8x - 15y + 24 \;\rightarrow\; 3x + 5y - 25 = 0 \\ 17x - 51 = -8x + 15y - 24 \;\rightarrow\; 25x - 15y - 27 = 0 \end{cases}$$

La tangente que buscamos es la que tiene pendiente negativa; es decir: $3x + 5y - 25 = 0$

- Para $P'\left(3, -\frac{16}{5}\right)$, tendríamos:

— recta, r_3, que pasa por $P'F \;\rightarrow\; x = 3 \;\rightarrow\; x - 3 = 0$

— recta, r_4, que pasa por $P'F' \;\rightarrow\; m' = -\frac{8}{15} \;\rightarrow\; y = -\frac{8}{15}(x + 3) \;\rightarrow$

$\rightarrow\; 8x + 15y + 24 = 0$

Bisectrices: $dist\big((x, y), r_3\big) = dist\big((x, y), r_4\big)$

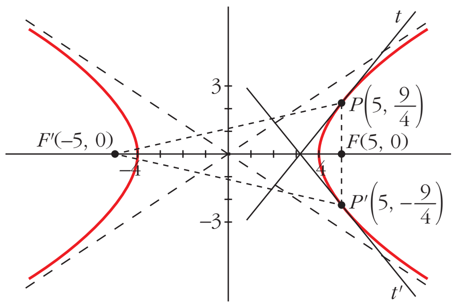
$$|x - 3| = \frac{|8x + 15y + 24|}{17}$$

$$\begin{cases} 17x - 51 = 8x + 15y + 24 \;\rightarrow\; 3x - 5y - 25 = 0 \\ 17x - 51 = -8x - 15y - 24 \;\rightarrow\; 25x + 15y - 27 = 0 \end{cases}$$

La tangente en este caso es la que tiene pendiente positiva; es decir: $3x - 5y - 25 = 0$

4. Halla la tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto de abscisa 5.

☛ ***Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz de los radios vectores y elige la adecuada.***



Hallamos los puntos de abscisa $x = 5$:

$$\frac{25}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \;\rightarrow\; y^2 = \frac{81}{16} \;\rightarrow\; y = \pm\frac{9}{4}$$

Hay dos puntos: $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$ y $P'\left(5, -\frac{9}{4}\right)$.

- Para $P\left(5, \frac{9}{4}\right)$:

— recta, r_1, que pasa por $PF \;\rightarrow\; x - 5 = 0$

— recta, r_2, que pasa por PF':

$$m = \frac{9/4}{10} = \frac{9}{40} \;\rightarrow\; y = \frac{9}{40}(x + 5) \;\rightarrow\; 9x - 40y + 45 = 0$$

Bisectrices: $dist\big((x, y), r_1\big) = dist\big((x, y), r_2\big)$

$$|x - 5| = \frac{|9x - 40y + 45|}{41}$$

$$\begin{cases} 41x - 205 = 9x - 40y + 45 \;\rightarrow\; 16x + 20y - 125 = 0 \\ 41x - 205 = -9x + 40y - 45 \;\rightarrow\; 5x - 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

La recta que buscamos tiene pendiente positiva; por tanto, es $5x - 4y - 16 = 0$.

Soluciones de los ejercicios

• Para $P'\left(5, \frac{-9}{4}\right)$:

— recta, r_3, que pasa por $P'F \rightarrow x - 5 = 0$

— recta, r_4, que pasa por $P'F'$:

$$m' = \frac{-9/4}{10} = \frac{-9}{40} \rightarrow y = \frac{-9}{40}(x + 5) \rightarrow 9x + 40y + 45 = 0$$

Bisectrices: $dist\big((x, y), r_3\big) = dist\big((x, y), r_4\big)$

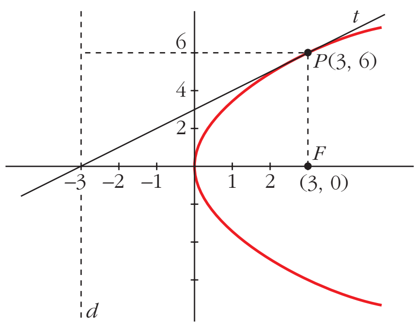
$$|x - 5| = \frac{|9x + 40y + 45|}{41}$$

$$\begin{cases} 41x - 205 = 9x + 40y + 45 \rightarrow 16x - 20y - 125 = 0 \\ 41x - 205 = -9x - 40y - 45 \rightarrow 5x + 4y - 16 = 0 \end{cases}$$

La recta que buscamos tiene pendiente negativa; por tanto, es $5x + 4y - 16 = 0$.

5. Halla la tangente a la parábola $y^2 = 12x$ en el punto $P(3, 6)$.

Utiliza el hecho de que la tangente es la bisectriz del ángulo formado por el radio vector PF y la recta perpendicular por P a la directriz.



• Hallamos el foco y la directriz de la parábola:

$F(3, 0)$; $d: x = -3$

— recta, r_1, que pasa por P y por F:

$x = 3 \rightarrow x - 3 = 0$

— recta, r_2, que pasa por P y es perpendicular a d:

$y = 6 \rightarrow y - 6 = 0$

Bisectriz del ángulo formado por r_1 y r_2: $dist\big((x, y), r_1\big) = dist\big((x, y), r_2\big)$

$$|x - 3| = |y - 6| \begin{cases} x - 3 = y - 6 \rightarrow x - y + 3 = 0 \\ x - 3 = -y + 6 \rightarrow x + y - 9 = 0 \end{cases}$$

La tangente que buscamos es la que tiene pendiente positiva; es decir: $x - y + 3 = 0$