3. Ejercicios de refuerzo: discusión de sistemas de ecuaciones

Soluciones

Discute y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

1 $$\begin{cases} 2x + 2y - 3z = \alpha \\ 2x + 6y - 11z = 2 \\ x - 2y + 7z = 1 \end{cases}$$

Resolución

$$\left.\begin{aligned} 2x + 2y - 3z &= \alpha \\ 2x + 6y - 11z &= 2 \\ x - 2y + 7z &= 1 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{matrix}}_{A} \middle| \begin{matrix} \alpha \\ 2 \\ 1 \end{matrix}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & -11 \\ 1 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 10 - 10\alpha = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 1$$

- Si $\alpha \neq 1$, entonces $ran\,(A') = 3 \neq ran\,(A) = 2$, y el sistema es *incompatible.*
- Si $\alpha = 1$, entonces $ran\,(A') = 2 = ran\,(A) <$ *n.° de incógnitas*, y el sistema es *compatible indeterminado.*

Si $\alpha = 1$, el sistema es:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 2x + 6y - 11z &= 2 \\ x - 2y + 7z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Como $ran\,(A) = 2$, eliminamos la 3.ª ecuación y pasamos z al segundo miembro como parámetro:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y &= 1 + 3z \\ 2x + 6y &= 2 + 11z \end{aligned}\right\}$$

Resolvemos por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 + 3z & 2 \\ 2 + 11z & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 4z}{2} = 1 - 2z \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 + 3z \\ 2 & 2 + 11z \end{vmatrix}}{2} = \frac{5}{2}z$$

El conjunto de soluciones del sistema es: $$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = \dfrac{5}{2}t \\ z = t \end{cases}$$

2 $$\left\{\begin{array}{l} \boldsymbol{x - y + z = \lambda} \\ \boldsymbol{\lambda x + 2y - z = 3\lambda} \\ \boldsymbol{2x + \lambda y - 2z = 6} \end{array}\right.$$

Resolución

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = \lambda \\ \lambda x + 2y - z = 3\lambda \\ 2x + \lambda y - 2z = 6 \end{array}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} \lambda \\ 3\lambda \\ 6 \end{array}\right.\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 2 & -1 \\ 2 & \lambda & -2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6 = 0 < \begin{array}{l} \lambda = 3 \\ \lambda = -2 \end{array}$$

- Si $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -2$, *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *n.° de incógnitas.*

  El sistema es *compatible determinado.*

  Lo resolvemos por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ 3\lambda & 2 & -1 \\ 6 & \lambda & -2 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{4\lambda^2 - 10\lambda - 6}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{4\lambda + 2}{\lambda + 2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 3\lambda & -1 \\ 2 & 6 & -2 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{2\lambda^2 - 8\lambda + 6}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{2\lambda - 2}{\lambda + 2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & \lambda \\ \lambda & 2 & 3\lambda \\ 2 & \lambda & 6 \end{vmatrix}}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \frac{\lambda^3 - 3\lambda^2 - 4\lambda + 12}{\lambda^2 - \lambda - 6} = \lambda - 2$$

Soluciones: $\left(\dfrac{4\lambda + 2}{\lambda + 2}, \dfrac{2\lambda - 2}{\lambda + 2}, \lambda - 2\right)$

- Si $\lambda = 3$:

$$A' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{array}}_{A}\left|\begin{array}{c} 3 \\ 9 \\ 6 \end{array}\right.\right) \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \rightarrow \textit{ran}\ (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \textit{ran}\ (A') = 2$$

ran (A) = *ran* (A') = 2 < *n.° de incógnitas.*

El sistema es *compatible indeterminado.*

Si $\lambda = 3$, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} x - \ \ y + \ \ z = 3 \\ 3x + 2y - \ \ z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{array}\right\}$$

Como $ran\ (A) = 2$, eliminamos la 3.ª ecuación y pasamos z al segundo miembro como parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} x - \ \ y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - z & -1 \\ 9 + z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-z + 15}{5} = 3 - \frac{z}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - z \\ 3 & 9 + z \end{vmatrix}}{5} = \frac{4z}{5}$$

El conjunto de soluciones del sistema es: $\left\{\begin{array}{l} x = 3 - \dfrac{t}{5} \\ y = \dfrac{4}{5}t \\ z = t \end{array}\right.$

- Si $\lambda = -2$:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{array}\right) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A) = 2$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -30 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\ (A') = 3$$

Como $ran\ (A) \neq ran\ (A')$, el sistema es *incompatible*.

3 $\left\{\begin{array}{r} \boldsymbol{x + ay - \ \ z = a} \\ \boldsymbol{2ax - \ \ y + az = 1} \\ \boldsymbol{3x - \ \ y + \ \ z = 0} \end{array}\right.$

Resolución

$$\left.\begin{array}{r} x + ay - \ \ z = a \\ 2ax - \ \ y + az = 1 \\ 3x - \ \ y + \ \ z = 0 \end{array}\right\} \ A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & a \\ 2a & -1 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{A}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & -1 & a \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 3a - 4 = 0 \ \begin{array}{l} \nearrow \ a = 1 \\ \searrow \ a = -4 \end{array}$$

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -4$, $ran\ (A) = ran\ (A') = 3 = n.°$ *de incógnitas*.

  El sistema es *compatible determinado*.

  Lo resolvemos por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a & a & -1 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2 + 3a - 4} = \frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 3a - 4} = \frac{a - 1}{a + 4}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & -1 \\ 2a & 1 & a \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{a^2 + 3a - 4} = \frac{a^2 + 4}{a^2 + 3a - 4}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & a \\ 2a & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{a^2 + 3a - 4} = \frac{-2a^2 + 6a + 1}{a^2 + 3a - 4}$$

Soluciones: $\left(\dfrac{a - 1}{a + 4}, \dfrac{a^2 + 4}{a^2 + 3a - 4}, \dfrac{-2a^2 + 6a + 1}{a^2 + 3a - 4} \right)$

- Si $a = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$

$$\left. \begin{array}{l} ran\ (A) = 2, \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \\ ran\ (A') = 3, \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array} \right\} ran\ (A) \neq ran\ (A'). \text{ El sistema es } \textit{incompatible}.$$

- Si $a = -4$: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & -1 & -4 \\ -8 & -1 & -4 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$

$$\left. \begin{array}{l} ran\ (A) = 2, \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -8 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \\ \\ ran\ (A') = 3, \text{ pues } \begin{vmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -8 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \end{array} \right\} ran\ (A) \neq ran\ (A'). \text{ El sistema es } \textit{incompatible}.$$

4 $$\left\{\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ -\lambda x + 3y + z &= -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2)z &= -5 \end{aligned}\right.$$

Resolución

$$\left.\begin{aligned} x + y + z &= -2 \\ -\lambda x + 3y + z &= -7 \\ x + 2y + (\lambda + 2)z &= -5 \end{aligned}\right\} \quad A' = \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda + 2 \end{matrix}}_{A} \left|\begin{matrix} -2 \\ -7 \\ -5 \end{matrix}\right.\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\lambda & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -2 \end{cases}$$

- Si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq -2$, entonces $ran\ (A) = ran\ (A') = 3 =$ *n.° de incógnitas*, y el sistema es *compatible determinado.*

  Lo resolvemos por el método de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -7 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & \lambda + 2 \end{vmatrix}}{\lambda^2 + 3\lambda + 2} = \frac{\lambda + 2}{\lambda^2 + 3\lambda + 2} = \frac{1}{\lambda + 1}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -\lambda & -7 & 1 \\ 1 & -5 & \lambda + 2 \end{vmatrix}}{\lambda^2 + 3\lambda + 2} = \frac{-2\lambda^2 - 6\lambda - 4}{\lambda^2 + 3\lambda + 2} = -2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -\lambda & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix}}{\lambda^2 + 3\lambda + 2} = \frac{-\lambda - 2}{\lambda^2 + 3\lambda + 2} = \frac{-1}{\lambda + 1}$$

Soluciones: $\left(\frac{1}{\lambda + 1}, -2, \frac{-1}{\lambda + 1}\right)$

- Si $\lambda = -1$:

$$A' = \left(\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix} \left|\begin{matrix} -2 \\ -7 \\ -5 \end{matrix}\right.\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran\ (A') = 3$$

En este caso, $ran\ (A) \neq ran\ (A')$, y el sistema es *incompatible.*

- Si $\lambda = -2$:

$$A' = \left(\begin{array}{cc:c|c} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & -7 \\ \hdashline 1 & 2 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\,(A) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -7 \\ 1 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; ran\,(A') = 2$$

Como $ran\,(A) = ran\,(A') = 2 <$ *n.° de incógnitas*, el sistema es *compatible indeterminado*.

Si $\lambda = -2$, el sistema es:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = -2 \\ 2x + 3y + z = -7 \\ x + 2y = -5 \end{array}\right\}$$

Como $ran\,(A) = 2$, eliminamos la 3.ª ecuación y pasamos z al segundo miembro como parámetro:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = -2 - z \\ 2x + 3y = -7 - z \end{array}\right\}$$

Este sistema ya es compatible determinado para cada valor de z, por lo que lo resolvemos aplicando la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2-z & 1 \\ -7-z & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 1 - 2z \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2-z \\ 2 & -7-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = -3 + z$$

Por tanto, la solución del sistema inicial para $\lambda = -2$ será: $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 + t \\ z = t \end{cases}$

5 **Un individuo realiza fotografías con una cámara digital. Sabe que cada fotografía de calidad normal ocupa siempre 0,20 megabytes de memoria. Cada fotografía de calidad óptima ocupa siempre una cantidad A de megabytes, pero el individuo no la conoce. Esta semana ha llevado a revelar 24 fotografías que le han ocupado un total de 9,2 megabytes de memoria.**

a) Plantea un sistema de ecuaciones (en función de A) donde las incógnitas sean el número de fotos de cada clase que ha realizado. Estudia la compatibilidad del sistema.

b) ¿Hay alguna cantidad de megabytes que es imposible que ocupe cada foto de calidad óptima?

c) La semana pasada también hizo 24 fotos y ocupó 9,2 megabytes de memoria en total. ¿Es posible que el número de fotos de cada tipo fuera diferente al de esta semana?

Resolución

a) Llamamos x al n.º de fotos de calidad normal e
y al n.º de fotos de calidad óptima

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}20x + Ay = 9{,}2 \\ x + y = 24 \end{array}\right\}$$

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}2 & A \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{cc:c} 0{,}2 & A & 9{,}2 \\ 1 & 1 & 24 \end{array}\right)$$

Así:

$$|M| = \begin{vmatrix} 0{,}2 & A \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0{,}2 - A = 0 \iff A = 0{,}2$$

Si $A = 0{,}2 \rightarrow ran\,(M) = 1$

Si $A \neq 0{,}2 \rightarrow ran\,(M) = 2$

$ran\,(M') = 2$ para cualquier valor de A, pues $\begin{vmatrix} 0{,}2 & 9{,}2 \\ 1 & 24 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto:

- Si $A \neq 0{,}2$

  $ran\,(M) = ran\,(M') = 2 =$ *n.º de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

- Si $A = 0{,}2$

  $ran\,(M) \neq ran\,(M')$. El sistema es *incompatible*.

b) Cada foto de calidad óptima no puede ocupar 0,20 megabytes, porque entonces el sistema no tendría solución.

c) No es posible que el número de fotos fuera diferente al de esta semana, porque, según el apartado b), debe ser $A \neq 0{,}2$ y si $A \neq 0{,}2$, el sistema es *compatible determinado*, es decir, su solución es única.