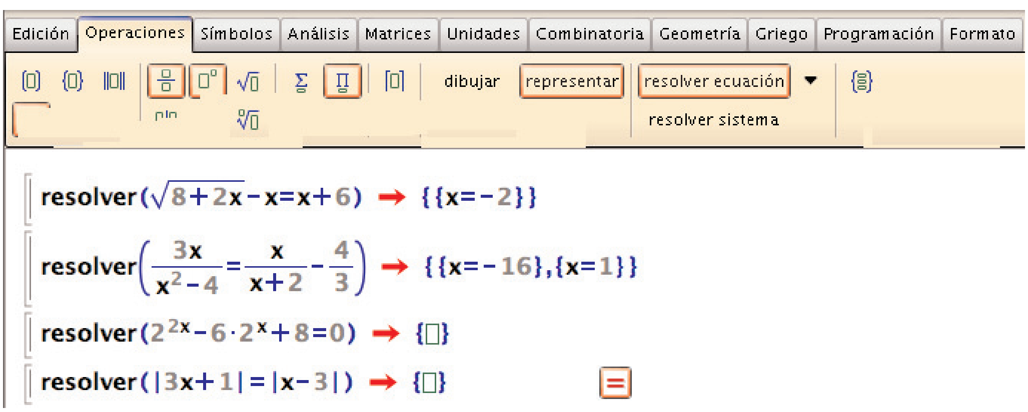
1 SISTEMAS DE ECUACIONES. MÉTODO DE GAUSS

En esta unidad recordarás lo que son los sistemas de ecuaciones lineales, cuándo tienen solución, su interpretación geométrica y una nueva forma de resolverlos: el método de Gauss.

El software matemático WIRIS solo te será de ayuda, en esta unidad, como herramienta para comprobar las soluciones de los sistemas que se te propongan. Recuerda: en este momento de tu educación matemática no vale solo con escribir el resultado de un ejercicio. Es más importante cómo se llega a él. Y, para eso, no puede ayudarte la calculadora WIRIS.

RESOLVER ECUACIONES

La resolución de ecuaciones no es un contenido específico de esta unidad, ni siquiera de este curso. Sin embargo, te puede ser muy útil dominar este proceso. Ya en el capítulo inicial, Operaciones Básicas, te indicamos qué icono o comando se utiliza para este proceso.



Tipos de ecuaciones

Vamos a ver cómo trata WIRIS algunos tipos de ecuaciones que no sean una ecuación con una incógnita.

Por ejemplo, queremos calcular las soluciones de la ecuación $x - y = 3$. A estas alturas ya sabrás que esto es una recta, es decir, que tiene infinitas soluciones. ¿Cómo expresa WIRIS ese concepto de infinitud? Veámoslo:

$$\text{resolver}(x-y=3) \rightarrow \{\{x=y+3, y=y\}\}$$

¿Ves? Lo expresa en lo que es una especie de solución paramétrica, aunque sin parámetro. Lo que nos dice WIRIS es que la y puede valer lo que quiera. Y que para cada valor de y, hay un único valor de x. Es decir, que hay infinitas soluciones.

Si en vez de dos incógnitas introdujéramos tres $(x, y$ y $z)$, WIRIS tarda unos segundos más, pero nos da la misma solución: $z = z$, $y = y$ y la x la pone en función de la y y de la z. Y ya tenemos, otra vez, nuestra infinitud de soluciones. En este caso se trata de un plano en el espacio.

¿Cómo nos da WIRIS la solución de una ecuación con solución “rara”? Por ejemplo:

$$\text{resolver}(2x=(\sqrt{3}+5)) \rightarrow \left\{\left[x=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}\right]\right\}$$

A lo mejor tú prefieres que la solución sea un número decimal. Nunca se sabe, quizás hasta te es útil. En ese caso WIRIS tiene un comando, **resolver_numericamente**, que hace precisamente eso: te ofrece la solución como un número decimal.

Otro tipo de ecuaciones que podríamos necesitar resolver son las trigonométricas, que estudiaste el curso pasado. Observa lo que ocurre cuando introduces, por ejemplo, $\cos 3x + \cos x = 0$. ¿Cuál o cuáles son sus soluciones?

$$\text{resolver}(\cos(3x)+\cos(x)=0)$$

¿Y qué nos devuelve WIRIS como solución?

0: Aviso, dificultad: No es posible encontrar un resultado o solución.

Pues eso, que WIRIS no sabe cómo resolver esta ecuación. ¿Y si utilizamos el comando **resolver_numericamente**?

$$\text{resolver\_numericamente}(\cos(3x)+\cos(x)=0) \rightarrow \{x=-0.7854\}$$

¡Bingo! Ahí tenemos nuestra solución. Bueno, en realidad tenemos una de nuestras soluciones: esta ecuación trigonométrica tiene seis soluciones. Cada solución es un ángulo. ¿Y qué clase de ángulo es –0,7854? Pues aplicando lo que sabemos de grados y de radianes, nos damos cuenta de que ese número decimal equivale a $-\pi/4$, es decir, 315º, que es una de las seis soluciones de esta ecuación.

La solución que nos ha ofrecido WIRIS no es, desde luego, óptima, pero algo es algo, ¿no?

Prueba tú con otro tipo de ecuaciones, de las que sepas que tienen solución o no, para ver cómo responde WIRIS. Ten en cuenta que en estos momentos iniciales del curso estás aprendiendo cómo responde WIRIS a tus peticiones.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

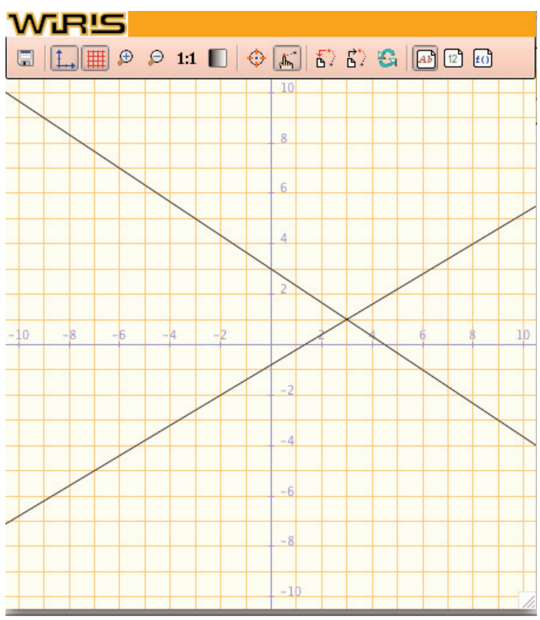
Un aspecto muy importante donde puedes utilizar WIRIS para tu estudio de esta unidad es a la hora de interpretar geométricamente un sistema de ecuaciones lineales. WIRIS te permitirá dibujar las ecuaciones que componen el sistema que estás resolviendo. Estas representaciones, ya sean rectas o planos, y sus intersecciones, te dirán cuántas soluciones y de qué tipo tiene tu sistema.

Es importante, para poder representar ecuaciones, que recuerdes que una ecuación con dos variables se ve como una recta (dibujo en 2D), y que una ecuación con tres variables se ve como un plano (dibujo en 3D). Estas serán las opciones que deberás elegir en WIRIS para poder dibujarlas.

Veamos un ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 3x - 5y = 4 \end{cases}$$

Para dibujar las dos rectas juntas y ver si se cortan y dónde, en la pestaña **Operaciones** pulsamos el icono **Representar** y escribimos la primera ecuación. Después damos a **Intro**, volvemos a pulsar en el icono **Representar** y escribimos la segunda ecuación. Una vez escritas las dos ecuaciones, pulsamos en = y el resultado es el siguiente:

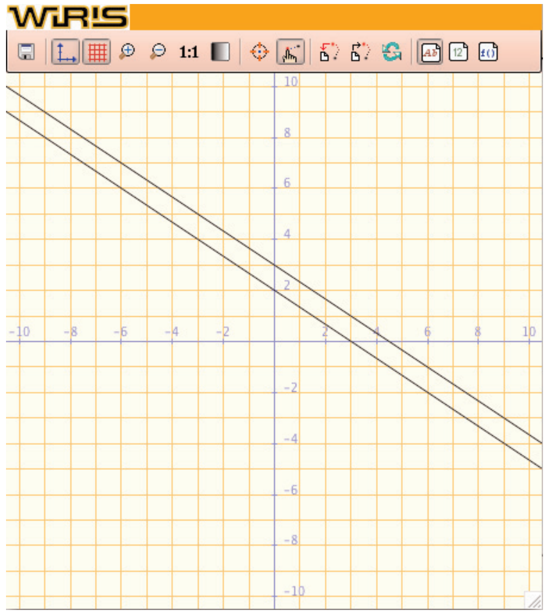


Así, podemos ver que el punto de intersección de las dos rectas, que es la solución de nuestro sistema, es el (3, 1).

Otro ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 4x + 6y = 12 \end{cases}$$

Siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo anterior, vemos que:



Como se ve en la representación gráfica, las dos rectas no se cortan, es decir, el sistema de nuestro ejemplo no tiene solución.

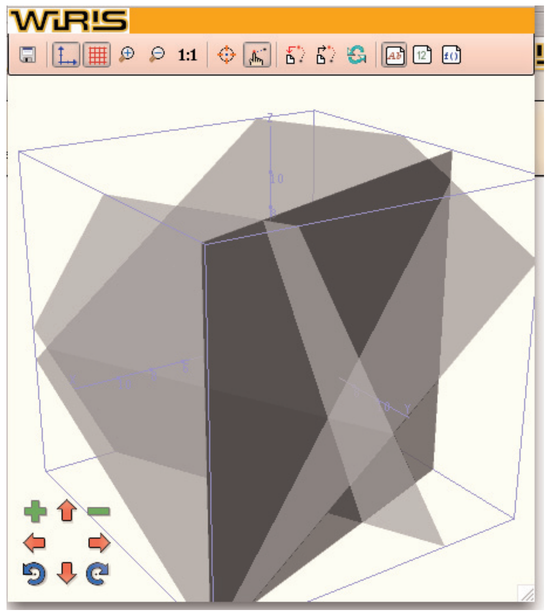
Vamos a representar gráficamente un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, para ver cómo trata WIRIS las intersecciones de planos. Utilizaremos, por ejemplo, el sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 11 \\ x - 3y = -20 \\ 4x + 2y + 5z = 8 \end{cases}$$

A diferencia del caso con dos ecuaciones, ahora pincharemos, en la pestaña **Operaciones**, en el icono **Dibujar3d**. Escribiremos la primera ecuación y daremos a **Intro**. Después, volvemos a pinchar en **Dibujar3d**, escribiremos la segunda ecuación e **Intro**. Por último, volvemos a pinchar en **Dibujar3d** y escribiremos la última ecuación.

```
dibujar3d(2x+y-z=11)
dibujar3d(x-3y=-20)
dibujar3d(4x+2y+5z=8)
```

Una vez que pulsemos en , el resultado es el siguiente:

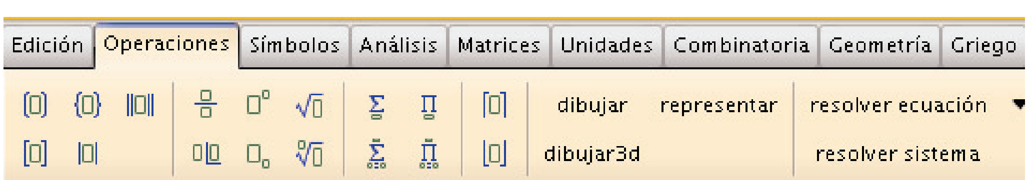


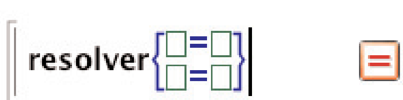
En este caso tenemos que el sistema es compatible determinado (con una única solución). Pinchando sobre las flechas rojas que aparecen en la imagen podemos rotar el dibujo para ver la figura desde distintos puntos. Es conveniente hacer esto, porque dados los colores que aparecen en la imagen se pueden tener dudas sobre si un sistema tiene o no solución.

RESOLUCIÓN ALGEBRAICA

En vez de representar las ecuaciones (rectas) de nuestros ejemplos, podríamos haber resuelto directamente los sistemas. Veamos cómo.

En la misma pantalla en la que nos encontramos, pinchamos sobre el icono **Resolver Sistema**. Aparecerá una caja de texto donde nos preguntan cuántas ecuaciones tiene nuestro sistema. Pondremos 2.





En cada una de las cajas verdes escribiremos los dos miembros de las dos ecuaciones que componen nuestro sistema. Al pulsar en $\boxed{=}$ obtendremos nuestra solución.

$$\text{resolver}\begin{Bmatrix} 2x+3y=9 \\ 3x-5y=4 \end{Bmatrix} \rightarrow \{\{x=3, y=1\}\}$$

En el caso de un sistema incompatible (sin solución), nos saldrá un mensaje como este:

0: Aviso, dificultad: No es posible encontrar un resultado o solución.

Si nuestro sistema tuviera más de dos ecuaciones, solo tendremos que escribir el número de ellas en la caja de texto correspondiente.