1 **Resuelve e interpreta geométricamente los sistemas siguientes:**

$$\textbf{a)}\ \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 11 \\ -x + 3y = 0 \end{cases} \qquad \textbf{b)}\ \begin{cases} 2x - y \phantom{{}-z} = 5 \\ \phantom{2x-{}} y - z = 3 \end{cases}$$

Resolución

a) $$\left.\begin{aligned} 2x + 6y &= 0 \\ 3x - 2y &= 11 \\ -x + 3y &= 0 \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ 3\cdot(2.^a)}} \begin{aligned} 2x + 6y &= 0 \\ 9x - 6y &= 33 \\ \hline 11x \phantom{{}+6y} &= 33 \end{aligned} \to x = 3 \to y = -1$$

Sumando la 1.ª fila con 3 veces la 2.ª

Comprobamos en la 3.ª ecuación:

$$-3 + 3(-1) \neq 0$$

El sistema es *incompatible*. Son tres rectas que se cortan dos a dos.

b) $$\left.\begin{aligned} 2x - y \phantom{{}-z} &= 5 \\ y - z &= 3 \end{aligned}\right\} \text{ Hacemos } y = \lambda: \begin{cases} 2x = 5 + \lambda \to x = \dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2} \\ z = \lambda - 3 \end{cases}$$

El sistema es *compatible indeterminado*.

Solución: $\left(\dfrac{5}{2} + \dfrac{\lambda}{2}, \lambda, -3 + \lambda\right)$

Representa dos planos que se cortan en una recta.

2 **Resuelve por el método de Gauss el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} \mathbf{5x + 10y + 50z = 950} \\ \mathbf{y = z + 9} \\ \mathbf{\dfrac{y}{3} = \dfrac{x}{4}} \end{cases}$$

Resolución

Ordenamos y simplificamos la 1.ª ecuación:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 10z &= 190 \\ y - z &= 9 \\ -3x + 4y \phantom{{}+10z} &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 190 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ -3 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + 3\cdot(1.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 190 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 10 & 30 & 570 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) : 10}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 190 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 57 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a)}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 10 & 190 \\ 0 & 1 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 4 & 48 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} x + 2y + 10z &= 190 \\ y - z &= 9 \\ 4z &= 48 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &z = 12 \\ &y = 9 + 12 = 21 \\ &x = 190 - 42 - 120 = 28 \end{aligned}$$

Solución: $x = 28,\ y = 21,\ z = 12$

Comprobación:

$$5 \cdot 28 + 10 \cdot 21 + 50 \cdot 12 = 950$$

$$21 = 12 + 9$$

$$\frac{21}{3} = \frac{28}{7}$$

3 **Una compañía tiene tres camiones (P, Q y R), en los que caben exactamente un cierto número de contenedores de tres tipos (A, B y C), de acuerdo con la siguiente tabla:**

	A	B	C
P	5	3	4
Q	2	5	5
R	4	3	6

Si se han de transportar 45 contenedores del tipo A, 44 del tipo B y 58 del tipo C, ¿cuántos viajes ha de hacer cada camión si todos los viajes los efectúan totalmente llenos?

Resolución

Sean x, y, z el número de viajes que hacen los camiones P, Q y R, respectivamente.

$$\left.\begin{array}{l} 5x + 2y + 4z = 45 \\ 3x + 5y + 3z = 44 \\ 4x + 5y + 6z = 58 \end{array}\right\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 3 & 5 & 3 & 44 \\ 4 & 5 & 6 & 58 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ 5 \cdot (2.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ 5 \cdot (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 0 & 19 & 3 & 85 \\ 0 & 17 & 14 & 110 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ 19 \cdot (3.^a) - 17 \cdot (2.^a) \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 45 \\ 0 & 19 & 3 & 85 \\ 0 & 0 & 215 & 645 \end{array}\right) \to \left\{\begin{array}{l} 5x + 2y + 4z = 45 \\ 19y + 3z = 85 \\ 215z = 645 \end{array}\right.$$

Resolvemos este sistema escalonado:

$$z = 3 \qquad y = \frac{85 - 3z}{19} = \frac{85 - 9}{19} = 4 \qquad x = \frac{45 - 2y - 4z}{5} = \frac{45 - 8 - 12}{5} = 5$$

Por tanto, el camión P debe hacer 5 viajes; el camión Q debe hacer 4 viajes, y el camión R debe hacer 3 viajes.

4 **Sean las ecuaciones:** $\left\{\begin{array}{l} \mathbf{3x - 2y + z = 5} \\ \mathbf{2x - 3y + z = -4} \end{array}\right.$

a) Añade una ecuación para que el sistema sea incompatible.

b) Añade una ecuación para que el sistema sea compatible determinado.

Justifica en cada caso el procedimiento seguido.

Resolución

a) Para que sea *incompatible*, la ecuación que añadamos ha de ser de la forma:

$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k$ con $k \neq 5a - 4b$.

Si tomamos, por ejemplo, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$3x - 2y + z = 1$

Añadiendo esta ecuación, el sistema sería *incompatible*.

b) Por ejemplo, añadiendo $y = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3x + z = 5 \\ 2x + z = -4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{array}\right\} \text{Sistema } \textit{compatible determinado}$$

5 **Se considera el sistema de ecuaciones lineales:**

$$\left\{\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right.$$

a) Encuentra un valor de a para el cual el sistema sea incompatible.

b) Discute si existe algún valor de a para el cual el sistema sea compatible determinado.

c) Resuelve el sistema para $a = 0$.

Resolución

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2+a) & 6 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

a) Si $a = 2$, la 2.ª ecuación no tiene solución: $0y = 1$. El sistema es *incompatible*.

b) No existe ningún valor de a para el cual el sistema sea *compatible determinado*, porque la 3.ª ecuación se puede suprimir $(0x + 0y + 0z = 0)$ y el sistema queda con dos ecuaciones y tres incógnitas.

c) Si $a = 0$, queda:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y \qquad = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \quad \to \quad x = 2 - 3z \\ z = \lambda \end{array}$$

Soluciones: $\left(2 - 3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda\right)$

6 **Discute este sistema según los valores de** a. **Interprétalo geométricamente:**

$$\begin{cases} ax + \ \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Resolución

$$\left.\begin{array}{r} ax + \ \ y + z - 4 = 0 \\ x + \ \ y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} ax + \ \ y + z = \ \ 4 \\ x + \ \ y + z = -1 \\ x - ay + z = \ \ 1 \end{array}\right\} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(2.^a)\\(1.^a)\\(3.^a)\end{array}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{c}(1.^a)\\(2.^a)-(1.^a)\\(3.^a)-(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a-1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a-1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- Si $a = 1$, queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

  Los dos primeros planos son paralelos y el tercero los corta.

- Si $a = -1$, queda:

  $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \text{Sistema } \textit{incompatible}$$

  Los dos últimos planos son paralelos y el primero los corta.

- Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$ $\to$ Sistema *compatible determinado*. Son tres planos que se cortan en un punto.