12 **Resuelve, si es posible, los siguientes sistemas:**

a) $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right.$ **b)** $\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right.$

c) $\left\{\begin{array}{l} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right.$ **d)** $\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{array}\right.$

Resolución

a) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\longrightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{array}\right\}$

$y = 1 \qquad z = \dfrac{19 - 3y}{2} = 8 \qquad x = 9 - 2y - z = -1$

Solución: $(-1, 1, 8)$

Comprobamos la solución: $\left\{\begin{array}{l} -1 + 2 + 8 = 9 \\ -1 - 1 - 8 = -10 \\ -2 - 1 + 8 = 5 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{array}\right\} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \begin{array}{l} (1.^a) \\ -(2.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{array}\right)$

El sistema es *compatible indeterminado* (tiene más incógnitas que ecuaciones).

Lo resolvemos en función de z:

$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{7}{5} - \dfrac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \dfrac{14}{5} + \dfrac{2z}{5} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{3z}{5} \end{array}$

Si hacemos $z = 5\lambda$, las soluciones son: $\left(\dfrac{1}{5} - 3\lambda,\ \dfrac{7}{5} - \lambda,\ 5\lambda\right)$

Comprobamos la solución: $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{5} - 3\lambda + \dfrac{14}{5} - 2\lambda + 5\lambda = 3 \\ \dfrac{2}{5} - 6\lambda - \dfrac{7}{5} + \lambda + 5\lambda = -1 \end{array}\right.$

Resolución de algunos Ejercicios y Problemas: Ejercicio 12

c) $\left.\begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 2x - 4y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (3.^a) \\ (2.^a) \\ (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) + 2 \cdot (3.^a) \\ (3.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right)$

La 2.ª ecuación es imposible: $0x + 0y + 0z = 5$

El sistema es *incompatible*.

d) $\left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x - y &= 0 \\ 4x + y - z &= 0 \end{aligned}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) + (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \to$

$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left.\begin{aligned} 2x - 3y + z &= 0 \\ 3x - y &= 0 \end{aligned}\right\}$

$y = 3x$

$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$

$x = \lambda$

Soluciones: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

Comprobamos la solución: $\left\{\begin{aligned} 2\lambda - 9\lambda + 7\lambda &= 0 \\ 3\lambda - 3\lambda &= 0 \\ 4\lambda + 3\lambda - 7\lambda &= 0 \end{aligned}\right.$