18 Resuelve cada uno de los siguientes sistemas para los valores de m que lo hacen compatible:

a) $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$

Resolución

a) Aplicamos el método de Gauss para hallar los valores de m que hacen compatible el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 4 \cdot (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m - 12 \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) : (-5) \\ (3.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m - 7 \end{array}\right)$$

- Si $m = 7 \to$ Sistema *compatible determinado.*

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array}\right\} x = 3 - 2y = 1$$

Solución: (1, 1)

Comprobamos la solución: $\begin{cases} 1 + 2 = 3 \\ 2 - 1 = 1 \\ 4 + 3 = 7 \end{cases}$

- Si $m \neq 7 \to$ Sistema *incompatible.*

b) $$\left.\begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array}\right) \to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) - 2 \cdot (1.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (1.^a) \\ (4.^a) - (1.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m - 2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - (2.^a) \\ (4.^a) - (2.^a) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m + 1 \end{array}\right)$$

- Si $m = -1 \to$ Sistema *compatible indeterminado.*

$$\left.\begin{array}{r} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{-3 - 7z}{3} = -1 - \dfrac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \dfrac{7z}{3} + 2z = 1 - \dfrac{z}{3} \end{array}$$

Haciendo $z = 3\lambda$:

Soluciones: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

Comprobamos la solución: $\begin{cases} 1 - \lambda + 1 + 7\lambda - 6\lambda = 2 \\ 2 - 2\lambda - 1 - 7\lambda + 9\lambda = 1 \\ 3 - 3\lambda + 3\lambda = 3 \\ 1 - \lambda - 2 - 14\lambda + 15\lambda = -1 \end{cases}$

- Si $m \neq -1 \to$ Sistema *incompatible.*