20 **Discute los siguientes sistemas de ecuaciones:**

a) $\begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

Resolución

a) Aplicamos el método de Gauss para transformarlo en escalonado y hallar los valores de k que lo hacen compatible:

$$\left.\begin{aligned} x - y - z &= k \\ x - y + 2z &= 1 \\ 2x + y + kz &= 0 \end{aligned}\right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - (1.^a)\\(3.^a) - 2 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1-k \\ 0 & 3 & k+2 & -2k \end{array}\right)$$

En la 2.ª ecuación $(3z = 1 - k)$ obtenemos z para cualquier valor de k.

Llevando el valor de z a la 3.ª, obtenemos y. Con estos valores de z e y obtenemos x en la 1.ª.

El sistema es *compatible determinado* para todo k.

b) $\left.\begin{aligned} x + y - z &= 0 \\ x + 3y + z &= 0 \\ 3x + ay + 4z &= 0 \end{aligned}\right\}$ Los sistemas *homogéneos* son siempre *compatibles*. Estudiamos si tienen solución única, (0, 0, 0), o bien, infinitas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - (1.^a)\\(3.^a) - 3 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) : 2\\(3.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a) - 7 \cdot (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Si $a = 10$, la 3.ª ecuación es $0y = 0$ que se verifica para cualquier valor de y $\rightarrow$ Sistema *compatible indeterminado*.

- Si $a \neq 10$, la 3.ª ecuación nos lleva a $y = 0$, y las otras a $z = 0$, $x = 0$ $\rightarrow$ Sistema *compatible determinado*.

c) $\left.\begin{array}{r} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right)$ Cambiamos el orden de las ecuaciones de forma que el parámetro pasa a estar en la 3.ª ecuación.

$$\xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(3.^a)\\(2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) + 2 \cdot (1.^a)\\(3.^a) + (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m + 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema es *compatible determinado* para todo m.

d) $\left.\begin{array}{r} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\}$ Cambiamos el orden de las ecuaciones de forma que en la 1.ª el coeficiente de x sea 1; el parámetro pasa a estar en la 3.ª ecuación:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l}(3.^a)\\(2.^a)\\(1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{array}\right) \to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a) - 5 \cdot (1.^a)\\(3.^a) - 3 \cdot (1.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a + 3 & -2 \end{array}\right) \to$$

$$\to \xrightarrow{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\-2 \cdot (3.^a) + (2.^a)\end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2 - 2a & 1 \end{array}\right)$$

$2 - 2a = 0 \ \to \ a = 1$

- Si $a = 1 \ \to$ Sistema *incompatible.*
- Si $a \neq 1 \ \to$ Sistema *compatible determinado.*