2. Profundización teórica: justificación de la validez del método de Gauss para la obtención de la matriz inversa de otra

Forma matricial de un sistema de ecuaciones

Los sistemas de ecuaciones pueden ser tratados de forma muy elegante valiéndonos de las matrices. Por ejemplo, el sistema:

$$\left.\begin{array}{rcl} -x + y + z &=& -1 \\ x \qquad - 3z &=& -18 \\ 2x - 5y + 3z &=& 52 \end{array}\right\} \text{ puede ponerse así: } \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Observa que se aplica el producto de matrices y el hecho de que dos matrices son iguales si coinciden término a término.

Esta expresión matricial del sistema de ecuaciones puede ponerse, abreviadamente, así:

$$A \cdot X = C, \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ -18 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Obtención de la inversa

Si conociéramos la inversa, A^{-1}, de la matriz A se podría resolver muy fácilmente la ecuación, pues

$$A \cdot X = C \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot C \Rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I \cdot X = A^{-1} \cdot C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C$$

Hemos dicho que si conociéramos A^{-1} podríamos resolver el sistema.

Pero el sistema lo sabemos resolver sin conocer A^{-1} mediante el método de Gauss. De modo que le damos la vuelta a la frase anterior:

"Puesto que sabemos resolver el sistema mediante el método de Gauss, quizá podamos obtener la matriz inversa de A^{-1}". Veámoslo.

Resolución del sistema por el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -18 \\ 2 & -5 & 3 & 52 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{I}]{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)+(1.^a)\\(3.^a)+2\cdot(1.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & -3 & 5 & 50 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II}]{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)+3\cdot(2.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{III}]{\begin{array}{l}(1.^a)\\(2.^a)-2\cdot(3.^a)\\(3.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV}]{\begin{array}{l}(1.^a)-(2.^a)+(3.^a)\\(2.^a)\\(3.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{V}]{\begin{array}{l}(-1)\cdot(1.^a)\\(2.^a)\\(-1)\cdot(3.^a)\end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

2. Profundización teórica: justificación de la validez del método de Gauss para la obtención de la matriz inversa de otra

El método de Gauss, en rigor, acaba tras los dos primeros pasos. Los pasos siguientes, III, IV y V, se dan para terminar de despejar las incógnitas. Al final, el sistema está resuelto: $x = 3$, $y = -5$, $z = 7$.

Veamos cómo cada uno de los pasos anteriores puede ser analizado multiplicando la matriz de partida por una cierta matriz a la que llamaremos **matriz del cambio**. Esfuérzate en entender, en cada paso, qué tiene que ver el *cambio realizado en las filas de la matriz* con la *matriz del cambio* por la que se multiplica por la izquierda.

PASO	CAMBIO EN LAS FILAS		MATRIZ DEL CAMBIO	COMPROBACIÓN
I	(1.ª) (2.ª) + (1.ª) (3.ª) + 2 · (1.ª)	→	$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -18 \\ 2 & 5 & 3 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & -3 & 5 & 50 \end{pmatrix}$
II	(1.ª) (2.ª) (3.ª) + 2 · (1.ª)	→	$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & -3 & 5 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$
III	(1.ª) (2.ª) – 2 · (3.ª) (3.ª)	→	$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -19 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$
IV	(1.ª) – (2.ª) + (3.ª) (2.ª) (3.ª)	→	$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix}$
V	(–1) · (1.ª) (2.ª) (–1) · (3.ª)	→	$M_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$

En total, la concatenación de los cinco pasos ha sido:

$$M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 & -18 \\ 2 & -5 & 3 & 52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

El producto $M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1 = M$ es una matriz 3×3 que compendia todos los cambios realizados.

Si prescindimos de la columna de los términos independientes, el cambio total realizado por la matriz de los coeficientes ha sido:

$$M \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

Por tanto, M es la matriz inversa de A. Es decir:

$$A^{-1} = M = M_5 \cdot M_4 \cdot M_3 \cdot M_2 \cdot M_1$$

Regla práctica para obtener A^{-1}

Podemos encontrar una regla práctica para calcular A^{-1}, más cómoda que la de obtener las matrices M y multiplicarlas. Consiste en *imponer a la matriz identidad los mismos cambios a los que hay que someter a* A *para obtener* I. Veamos por qué:

Para cualquier matriz B, el producto $M \cdot B$ consiste en someter a B a los mismos cambios a los que se ha sometido A. Recíprocamente, si a las filas de una matriz B las sometemos a los mismos cambios que se han efectuado en las de A, el resultado es la matriz $M \cdot B$.

Lo dicho para una matriz cualquiera, B, es válido para la matriz identidad:

$$A \xrightarrow{\substack{\text{sometida a} \\ \text{ciertos cambios}}} I \qquad\qquad M \cdot A = I \;\rightarrow\; M = A^{-1}$$

$$I \xrightarrow{\substack{\text{sometida a los} \\ \text{mismos cambios}}} A^{-1} \qquad\qquad M \cdot I = A^{-1} \cdot I = A^{-1}$$

Es interesante advertir que, según lo anterior, solo se podrá obtener A^{-1} cuando A pueda transformarse en I. Y eso ocurre cuando todas las filas de A sean linealmente independientes.

Por ejemplo:

Queremos calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para ello, colocamos la matriz A y, a continuación y separada por una línea vertical, la matriz identidad

$$\left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}}_{A}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\right)$$

Ahora, sometemos a la matriz A a los cambios que convengan para transformarla en I y vamos sometiendo, simultáneamente, a I a los mismos cambios. Cuando A se haya transformado en I, I lo habrá hecho en A^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (2.^a) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} (1.^a) + (2.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) \end{array} \quad \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\;\middle|\;\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\right)$$