29 **Estudia el rango de las siguientes matrices según el valor del parámetro k:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix}$$

Resolución

Aplicamos el método de Gauss para conseguir una fila de ceros.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & k+2 \end{pmatrix}$$

No existe ningún valor de k que nos permita obtener una fila de ceros. Así: $ran\ (M) = 3$ para cualquier valor de k.

$$N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ 2 \cdot (3.^a) - (1.^a) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1+2k & 0 \end{pmatrix} \to 1 + 2k = 0 \ \text{ si } \ k = -\frac{1}{2}$$

En este caso, los elementos de la tercera fila son todos ceros. Así:

- *Si* $k = -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 2$.
- *Si* $k \neq -\frac{1}{2}$, $ran\ (N) = 3$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \\ 4 & 12 & 8 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) \\ (3.^a) : 4 \\ (2.^a) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) \\ (2.^a) - (1.^a) \\ (3.^a) - 2 \cdot (1.^a) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k+2 \end{pmatrix}$$

- *Si* $k = -2 \to ran\ (P) = 1$
- *Si* $k \neq -2 \to ran\ (P) = 2$

Asimismo, podríamos observar que las tres primeras columnas son proporcionales y que si $k = -2$, también la cuarta columna es proporcional.

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & k \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) \\ (2.^a) + (1.^a) \\ (3.^a) + 2 \cdot (1.^a) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 12 & 3 & k+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} (1.^a) \\ (2.^a) \\ (3.^a) - 3 \cdot (2.^a) \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & k-2 \end{pmatrix}$$

Si $k = 2$, los elementos de la cuarta fila son todos ceros.

- *Si* $k = 2 \to ran\ (Q) = 2$
- *Si* $k \neq 2 \to ran\ (Q) = 3$