46 a) Si A es una matriz regular de orden n y existe una matriz B tal que $AB + BA = 0$, prueba que $BA^{-1} + A^{-1}B = 0$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, halla una matriz $B \neq 0$ tal que $AB + BA = 0$.

Resolución

a) Multiplicamos por A^{-1} por la izquierda en la igualdad:

$$AB + BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; \underbrace{A^{-1}A}_{I}B + A^{-1}BA = \mathbf{0} \;\rightarrow\; B + A^{-1}BA = \mathbf{0}$$

Ahora, multiplicamos $\underbrace{A^{-1}A}_{I}$ la igualdad obtenida por A^{-1} por la derecha:

$$BA^{-1} + A^{-1}BAA^{-1} = \mathbf{0} \;\rightarrow\; BA^{-1} + A^{-1}B = \mathbf{0}$$

b) Si $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a - 2c & -3b - 2d \\ 4a + 3c & 4b + 3d \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3a + 4b & -2a + 3b \\ -3c + 4d & -2c + 3d \end{pmatrix}$$

Así:

$$AB + BA = \begin{pmatrix} -6a + 4b - 2c & -2a - 2d \\ 4a + 4d & 4b - 2c + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} -6a + 4b - 2c \phantom{{}+6d} &= 0 \\ -2a \phantom{{}+4b-2c} - 2d &= 0 \\ 4a \phantom{{}+4b-2c} + 4d &= 0 \\ 4b - 2c + 6d &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &3a - 2b + c = 0 \\ &\left.\begin{aligned} a + d &= 0 \\ a + d &= 0 \end{aligned}\right\}\; d = -a \\ &2b - c + 3d = 0 \;\rightarrow\; 3a - 2b + c = 0 \;\rightarrow\; c = -3a + 2b \end{aligned}$$

Por tanto: $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -3a + 2b & -a \end{pmatrix}$, a y $b \neq 0$

Por ejemplo, con $a = 1$ y $b = 1$, queda $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Comprobamos esta solución:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$