49 **Una matriz cuadrada es *mágica* de suma k cuando la suma de los elementos de cada fila, de cada columna y de las dos diagonales es, en todos los casos, igual a k. ¿Cuánto vale k si una matriz mágica es antisimétrica? Halla todas las matrices mágicas antisimétricas de orden 3.**

Resolución

- Una matriz es antisimétrica si $A^t = -A$. Para ello, los elementos de la diagonal principal son ceros. Por tanto, si la matriz es antisimétrica, $k = 0$.

- Buscamos las matrices mágicas antisimétricas de orden 3: (sabemos que, en este caso, la suma ha de ser cero).

Veamos cómo es una matriz antisimétrica de orden 3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix};\ A \text{ antisimétrica si } A^t = -A, \text{ es decir:}$$

$$\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b & -c \\ -d & -e & -f \\ -g & -h & -i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} a = -a & b = -d & c = -g \\ d = -b & e = -e & f = -h \\ g = -c & h = -f & i = -i \end{cases}$$

Luego una matriz *antisimétrica* de orden 3 es de la forma: $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & f \\ -c & -f & 0 \end{pmatrix}$

Para que A sea *mágica*, ha de tenerse que: $\left.\begin{array}{r} b + c = 0 \\ -b + f = 0 \\ -c - f = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -b - c = 0 \\ b - f = 0 \\ c + f = 0 \end{array}\right\}$

es decir: $\begin{cases} c = -b \\ f = \ \ b \end{cases}$

Por tanto, las matrices *mágicas antisimétricas* de orden 3 son de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & -b \\ -b & 0 & b \\ b & -b & 0 \end{pmatrix}, \text{ con } b \in \mathbb{R}.$$