1 **Discute en función de a el siguiente sistema y resuélvelo si $a = 3$:**

$$\begin{cases} x - y + z = a \\ ax + 2y - z = 3a \\ 2x + ay - 2z = 6 \end{cases}$$

Resolución

El sistema será *compatible* si el rango de la matriz de coeficientes, M, coincide con el rango de la matriz ampliada, M'.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 2 & -1 \\ 2 & a & -2 \end{pmatrix} \qquad M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & a \\ a & 2 & -1 & 3a \\ 2 & a & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Estudiamos el rango de M buscando los valores de a que anulan el determinante de M:

$$|M| = -4 + a^2 + 2 - 4 + a - 2a = a^2 - a - 6 = 0 \quad \begin{cases} a = -2 \\ a = 3 \end{cases}$$

- **Si $a \neq -2$ y $a \neq 3$:**

  ran (M) = *ran* (M') = 3, y el sistema es *compatible determinado*.

- **Si $a = -2$:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (M) = 2$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 & -6 \\ 2 & -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (M') = 3$$

  ran $(M) = 2 <$ *ran* $(M') = 3 \;\rightarrow\;$ El sistema es *incompatible*.

- **Si $a = 3$:**

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \;\rightarrow\; ran\ (M) = 2$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; ran\ (M') = 2$$

  ran (M) = *ran* $(M') = 2 <$ *n.° de incógnitas* $\rightarrow$ El sistema es *compatible indeterminado*.

  Resolvemos ahora el sistema para $a = 3$

$$\left.\begin{array}{r} x - y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = 9 \\ 2x + 3y - 2z = 6 \end{array}\right\}$$

  Sabemos que el sistema es *compatible indeterminado*. Eliminamos la 3.ª ecuación, pasamos z al segundo miembro y lo resolvemos aplicando la regla de Cramer.

$$\left.\begin{array}{r} x - y = 3 - z \\ 3x + 2y = 9 + z \end{array}\right\}$$

$$z = \lambda \qquad x = \frac{\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 9+\lambda & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{15 - \lambda}{5} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3-\lambda \\ 3 & 9+\lambda \end{vmatrix}}{5} = \frac{4\lambda}{5}$$

2 **Determina para qué valores de *a* existe la matriz inversa de *M*. Calcula dicha matriz inversa para *a* = 2.**

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Resolución

La matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de 0.

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -a \\ 2a & 1 & -1 \\ 2 & a & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 2(1 - a^3 - 1 + a + a - a) = 2(-a^3 + a)$$

$$|M| = 0 \rightarrow -2(a^3 - a) = 0 \rightarrow -2a(a^2 - 1) = 0 \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

M tiene inversa si $a \neq 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$

Para $a = 2$:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad |M| = -12$$

$M_{11} = 3$; $M_{12} = -6$; $M_{13} = 6$

$M_{21} = -5$; $M_{22} = 6$; $M_{23} = -2$

$M_{31} = 1$; $M_{32} = -6$; $M_{33} = -2$

$$(M_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 \\ -5 & 6 & -2 \\ 1 & -6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow (M_{ij})^t = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ -6 & 6 & -6 \\ 6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow M^{-1} = -\frac{1}{12}(M_{ij})^t$$

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$M \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1/4 & 5/12 & -1/12 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/6 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 **Si** $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 4$, **calcula:**

a) $\begin{vmatrix} a & 3b-a \\ c & 3d-c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} b+2a & a \\ d+2c & c \end{vmatrix}$

Resolución

a) $\begin{vmatrix} a & 3b-a \\ c & 3d-c \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} \begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} 3\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 = 12$

b) $\begin{vmatrix} b+2a & a \\ d+2c & c \end{vmatrix} \overset{(3)}{=} \begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix} \overset{(4)}{=} -\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -4$

(1) A la 2.ª columna le sumamos la 1.ª. Esto no cambia el valor del determinante.

(2) Sacamos el 3 como factor común, puesto que los elementos de la 2.ª columna son múltiplos de 3.

(3) No cambia el valor del determinante si a la 1.ª columna le restamos el doble de la 2.ª.

(4) Al permutar las dos columnas, el determinante cambia de signo.

4 **Halla, en cada caso, la matriz** X **que verifica la igualdad:**

a) $A^{-1} X A = B$

b) $(A + X)B = I$

siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Resolución

a) $A^{-1} X A = B$

Multiplicamos por A por la izquierda y por A^{-1} por la derecha.

$$\underbrace{AA^{-1}}_{I} X \underbrace{AA^{-1}}_{I} = ABA^{-1} \to I X I = ABA^{-1} \to X = ABA^{-1}$$

Calculamos A^{-1}; $|A| = -3 + 2 = -1$

$$A_{11} = -1;\; A_{12} = 2;\; A_{21} = -1;\; A_{22} = 3 \to (A_{ij}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \to (A_{ij})^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t \to A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

b) $(A + X) B = I \to AB + XB = I \to XB = I - AB$

Multiplicamos por B^{-1} por la derecha:

$$\underbrace{XBB^{-1}}_{I} = (I - AB)B^{-1} \to XI = (I - AB)B^{-1} \to X = (I - AB)B^{-1}$$

Calculamos B^{-1}: $|B| = 1 + 2 = 3$

$$B_{11} = 1;\ B_{12} = -2;\ B_{21} = 1;\ B_{22} = 1 \ \rightarrow\ (B_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow\ (B_{ij})^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}(B_{ij})^t \ \rightarrow\ B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Calculamos $I - AB$:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow\ I - AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8/3 & -2/3 \\ 4/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

5 **El rango de la matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas es 2. ¿Qué rango puede tener la matriz ampliada? ¿Cuántas soluciones puede tener el sistema?**

Resolución

La matriz de coeficientes de un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas tiene tres filas y dos columnas. La matriz ampliada tendrá tres filas y tres columnas, y, por tanto, su rango puede ser 2 ó 3.

Si el rango de la matriz ampliada es 2, el sistema será *compatible determinado*; tendrá solución única.

Si el rango es 3, el sistema será *incompatible*; no tendrá solución.

6 **Discute y resuelve el siguiente sistema:**

$$\begin{cases} x - y - az = 1 \\ -3x + 2y + 4z = a \\ -x + ay + z = 0 \end{cases}$$

Resolución

$$A' = \left(\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & -1 & -a \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & a & 1 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ a \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & a & 1 \end{vmatrix} = 3a^2 - 6a + 3 = 0 \ \rightarrow\ 3(a-1)^2 = 0 \ \rightarrow\ a = 1$$

- **Si $\boldsymbol{a \neq 1}$**:

  $ran\ (A) = ran\ (A') = 3$, y el sistema es *compatible determinado*.

  Para cada valor de $a \neq 1$ tenemos un sistema con solución única.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ a & 2 & 4 \\ 0 & a & 1 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^3 - 3a + 2}{3(a-1)^2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -a \\ -3 & a & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^2 + a - 1}{3(a-1)^2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & a \\ -1 & a & 0 \end{vmatrix}}{3(a-1)^2} = \frac{-a^2 - 2a + 2}{3(a-1)^2}$$

- **Si $\boldsymbol{a = 1}$**:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow ran\ (A') = 3$$

El sistema es *incompatible*.