8 **Estudia el rango de estas matrices:**

a) $A = \begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ 1 & -a & 2a \end{pmatrix}$ **b)** $B = \begin{pmatrix} a-2 & 1 & a-1 \\ a & a & 6 \end{pmatrix}$

Resolución

a) El rango de la matriz A será menor o igual que 2, porque solo tiene dos filas.

Buscamos los valores que anulan el determinante formado por las dos filas y las dos primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} a & -1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 1 = 0 \quad \begin{cases} a = 1 \\ a = -1 \end{cases}$$

- **Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$:** $ran\ (A) = 2$
- **Si $a = 1$** $\to A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,\ ran\ (A) = 2$
- **Si $a = -1$** $\to A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0,\ ran\ (A) = 2$

El rango de A es 2 para cualquier valor de a.

b) El rango de B será menor o igual que 2, porque solo tiene dos filas.

Resolvemos $\begin{vmatrix} a-2 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = 0 \to a^2 - 2a - a = 0 \to a^2 - 3a = 0 \quad \begin{cases} a = 0 \\ a = 3 \end{cases}$

- **Si $a \neq 0$ y $a \neq 3$:** $ran\ (B) = 2$
- **Si $a = 0$** $\to B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \neq 0,\ ran\ (B) = 2$
- **Si $a = 3$** $\to B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. Las dos filas son proporcionales $\to ran\ (B) = 1$