21 **Discute los siguientes sistemas según los valores del parámetro m y resuélvelos cuando sea posible:**

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ x + my + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + my + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ mx + y + z = 4 \end{cases}$

Resolución

a) $\begin{cases} mx + y + z = 4 \\ x + y + z = m \\ x - y + mz = 2 \end{cases}$

El sistema tendrá solución si $ran\,(A) = ran\,(A')$, según el teorema de Rouché. Las matrices A y A' son:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & m & 2 \end{pmatrix}$$

Como A y A' tienen tres filas, su rango no puede ser mayor que 3.

Para estudiar el rango, buscamos en primer lugar los valores de m que anulan el determinante de A, por ser A una matriz cuadrada.

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = 0 \quad \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

- **Si $m = 1$:**

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

La 1.ª y la 2.ª ecuación son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si $m = -1$:**

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - y - z = 2 \end{cases}$$

La 1.ª y la 3.ª ecuación son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq -1$:** $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado*.

Resolvemos el sistema en este caso $(m \neq 1$ y $m \neq -1)$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{-m^2 + 3m + 4}{m^2 - 1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} m & 4 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 2 & m \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{m^3 - 7m + 6}{m^2 - 1}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 4 \\ 1 & 1 & m \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{m^2 - 1} = \frac{m^2 + 3m - 10}{m^2 - 1}$$

b) $\begin{cases} x + y + z = m - 1 \\ 2x + y + mz = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$

El sistema tendrá solución si $ran\ (A) = ran\ (A')$, según el teorema de Rouché. Las matrices A y A' son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m & m \\ 1 & m & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como A y A' tienen tres filas, su rango no puede ser mayor que 3.

Para estudiar el rango, buscamos, en primer lugar, los valores de m que anulan el determinante de A, por ser A una matriz cuadrada.

$$|A| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -m^2 + 3m - 2 = 0 \rightarrow m = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{-2} \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$$

- **Si $m = 1$:**

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } |A| = 0$$

  Buscamos en A un menor de orden 2 distinto de 0.

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ luego } ran\ (A) = 2$$

  Buscamos en A' un menor de orden 3 distinto de 0. El menor que tomamos en A es también un menor de A'. Si lo ampliamos con la 3.ª fila y la 4.ª columna:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \text{ luego } ran\ (A') = 3$$

  Por ser $ran\ (A) \neq ran\ (A')$, el sistema es *incompatible*.

  (Podríamos haber observado en A' que la 1.ª y la 3.ª son contradictorias y, por ello, el sistema es *incompatible*).

- **Si $m = 2$:**

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ con } |A| = 0$$

  Como en el caso anterior, encontramos $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow ran\ (A) = 2$.

  Ampliamos ese menor con la 3.ª fila y la 4.ª columna:

  $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow ran\ (A') = 2$$

  Al ser $ran\ (A) = ran\ (A') = 2$, el sistema es *compatible indeterminado*.

  Como tiene 3 incógnitas y el rango es 2, las soluciones dependen de un parámetro.

Resolvemos el sistema en este caso. Eliminamos una ecuación y tomamos z como parámetro:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{array}\right\} \; z = \lambda \qquad \left.\begin{array}{r} x + y = 1 - \lambda \\ 2x + y = 2 - 2\lambda \end{array}\right\}$$

$x = 1 - \lambda - y$

$2 - 2\lambda - 2y + y = 2 - 2\lambda \;\rightarrow\; y = 0$

$x = 1 - \lambda$

Las soluciones son: $x = 1 - \lambda,\; y = 0,\; z = \lambda$

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq 2$:** $|A| \neq 0$ y, por ello, $ran\,(A) = ran\,(A') = 3$. El sistema es *compatible determinado.*

  Resolvemos el sistema en este caso $(m \neq 1$ y $m \neq 2)$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ m & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{-m^3 + 2m^2 + m - 2}{-m^2 + 3m - 2} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m-1 & 1 \\ 2 & m & m \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{m^2 - 4m + 4}{-m^2 + 3m - 2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & m-1 \\ 2 & 1 & m \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}{-m^2 + 3m - 2} = \frac{-3m^2 + 4m - 2}{-m^2 + 3m - 2}$$

c) Razonando como en los casos a) y b), hacemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -2m + 2 = 0 \;\rightarrow\; m = 1$$

- **Si $m = 1$:**

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces: $ran\,(A) = 2 \neq ran\,(A') = 3$. El sistema es *incompatible.*

- **Si $m \neq 1$:** $ran\,(A) = ran\,(A') = 3 =$ *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*. Lo resolvemos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & m & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}}{2 - 2m} = \frac{4 - 6m}{2 - 2m} = \frac{3m - 2}{m - 1} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{2 - 2m} = \frac{4}{2 - 2m}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & m & 0 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{2 - 2m} = \frac{2m - 4}{2 - 2m} = \frac{m - 2}{1 - m}$$

Resolución de algunos Ejercicios y Problemas:
Ejercicio 21

d) Razonando como en los casos a) y b), tenemos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = m^2 - 4m + 3 = 0 \rightarrow m = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \begin{cases} m = 3 \\ m = 1 \end{cases}$$

- **Si $m = 3$**:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ La 1.ª y la 2.ª ecuación son contradictorias. El sistema es *incompatible*.

- **Si $m = 1$**:

$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right)$ La 1.ª y la 3.ª ecuación son iguales.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$, *ran* (A) = *ran* (A') = 2 < *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible indeterminado*.

Resolvemos el sistema para $m = 1$:

$\left.\begin{array}{l} x + 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right\}$ Hemos eliminado la 3.ª ecuación. Tomamos $z = \lambda$.

$\left.\begin{array}{l} x + 2y = -3\lambda \\ x + y = -\lambda \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = -2\lambda \\ x = \lambda \end{array}$

Las soluciones son: $x = \lambda$, $y = -2\lambda$, $z = \lambda$.

- **Si $m \neq 1$ y $m \neq 3$**: *ran* (A) = *ran* (A') = 3 = *n.° de incógnitas*. El sistema es *compatible determinado*.

Resolvemos el sistema en este caso $(m \neq 1$ y $m \neq 3)$:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & m & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{m^2 - 4m + 3} = \frac{1 - m}{m^2 - 4m + 3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ m & 4 & 1 \end{vmatrix}}{m^2 - 4m + 3} = \frac{1 - m}{m^2 - 4m + 3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 4 \\ 1 & 3 & 5 \\ m & 1 & 4 \end{vmatrix}}{m^2 - 4m + 3} = \frac{5m^2 - 16m + 11}{m^2 - 4m + 3}$$