



Ejercicio 23

23 Estudia, según los valores del parámetro, el rango de cada matriz:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } B = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$$

Resolución

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ k & k & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que $\text{ran}(A) \leq 3$. Hallamos los valores de k que anulan el determinante formado por las tres primeras filas y las tres primeras columnas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ k & k & 3 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6k - 18 = 0 \rightarrow k = 3$$

Para $k = 3$, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$. Buscamos un menor de orden 3 distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(A) = 3$$

Por tanto, $\text{ran}(A) = 3$ para cualquier valor de k .

$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} k & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} k & 1 & -2 \\ -1 & -1 & k \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 + 1 = 0 \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Si } k = 1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$$

$$\bullet \text{ Si } k = -1 \rightarrow B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{ran}(B) = 2$$

$$\bullet \text{ Si } k \neq -1 \rightarrow \text{ran}(B) = 3$$