



Ejercicio 28

28 Sea $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla los valores de x para los que A tiene inversa.

b) Calcula, si es posible, A^{-1} para $x = 2$.

Resolución

a) $|A| = x + 3x - 3x = x$

Si $x \neq 0$, A tiene inversa.

b) Si $x = 2$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = 2$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [\text{Adj}(A)]^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & -6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobación:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & 3/2 \\ 3 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$