Soluciones

1 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+1}{x-2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ **c)** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10}$

d) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$ **e)** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^3-5x^2+6x}{x^3-7x^2+16x-12}$

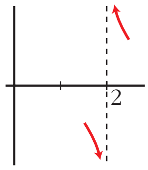
Resolución

a) Puesto que para $x = 2$ se anula el denominador pero no el numerador, el límite es $\pm\infty$.

Estudiemos los límites por la izquierda y por la derecha del punto 2 para analizar sus signos:

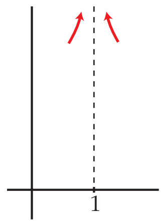
IZQUIERDA: $2 - 0{,}01 = 1{,}99$; $\dfrac{1{,}99+1}{1{,}99-2} = -299 < 0$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$

DERECHA: $2 + 0{,}01 = 2{,}01$; $\dfrac{2{,}01+1}{2{,}01-2} = 301 > 0$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$



b) Puesto que para $x = 1$ se anula el denominador pero no el numerador, el límite es $\pm\infty$. Pero, además, tanto el numerador como el denominador son positivos en las proximidades del punto $x = 1$.

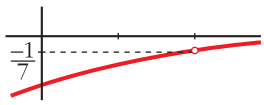
Por tanto, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty$



c) Para $x = 2$ se anulan el numerador y el denominador.

Puede simplificarse la fracción dividiendo ambos por $(x-2)$:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x+5)(x-2)} = \frac{x-3}{x+5}$$



Ya no se anula el denominador, y el límite puede obtenerse sustituyendo x por 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+3x-10} = \lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x+5} = -\frac{1}{7}$$

d) Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 2$. Por tanto, podemos simplificar la fracción:

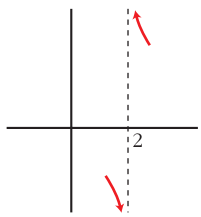
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2-3x)}{(x-2)(x^2-5x+6)} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x}{x^2-5x+6}$$

Ahora, para $x = 2$, observamos que se anula el denominador pero no el numerador. Por tanto, los límites laterales son $\pm\infty$. Veamos sus signos:

A la izquierda: $x = 2 - 0{,}01 = 1{,}99 \to \dfrac{1{,}99^2 - 3 \cdot 1{,}99}{1{,}99^2 - 5 \cdot 1{,}99 + 6} = \dfrac{-}{+} = -\infty$

A la derecha: $x = 2 + 0{,}01 = 2{,}01 \to \dfrac{2{,}01^2 - 3 \cdot 2{,}01}{2{,}01^2 - 5 \cdot 2{,}01 + 6} = \dfrac{-}{-} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$. No existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.



Soluciones

e) Tanto el numerador como el denominador se anulan para $x = 3$.

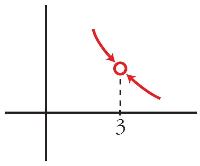
Por tanto, podemos simplificar la fracción:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(x^2-2x)}{(x-3)(x^2-4x+4)} = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$$

El denominador ya no se anula para $x = 3$.

Por tanto, para hallar el límite, simplemente sustituimos:

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4} = \frac{3^2-2 \cdot 3}{3^2-4 \cdot 3+4} = 3$$



2 **Calcula los límites de las funciones siguientes en los puntos que se indican. Donde convenga, especifica el valor del límite a la izquierda y a la derecha del punto. Representa gráficamente los resultados:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2-4}$ **en –2, 0 y 2**

b) $f(x) = \dfrac{4x-12}{(x-2)^2}$ **en 2, 0 y 3**

c) $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+2x-3}$ **en 1 y –3**

d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3+3x^2}$ **en 0 y –3**

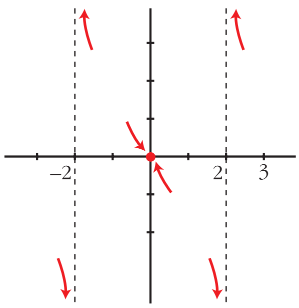
Resolución

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+2)(x-2)}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim_{x \to -2} f(x).$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim_{x \to 2} f(x).$$

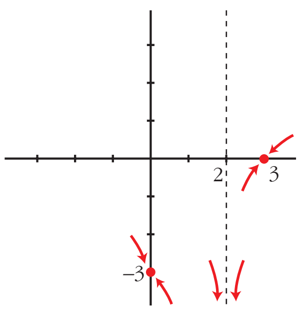


b) $f(x) = \dfrac{4(x-3)}{(x-2)^2}$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = -3$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 0$$

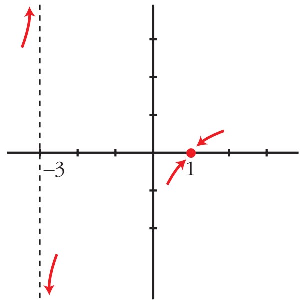


Soluciones

c) $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{(x-1)\,(x+3)}$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = -\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -3} f(x).$$



d) $f(x) = \dfrac{x^4}{x^2\,(x+3)}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -3^-} f(x) = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to -3^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \text{No existe } \lim\limits_{x \to -3} f(x).$$