1 **Calcula los siguientes límites:**

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{1-x}$ **b)** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (2 + e^x)$ **c)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2}$ **d)** $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x}$

Resolución

a) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{1-x} = -1$ b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} (2 + e^x) = 2 + 0 = 2$ c) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$ d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

2 **Halla el límite de la función $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{2x^2-8}$ cuando $x \to 2$, $x \to -2$, $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$.**

Representa gráficamente la información que obtengas.

Resolución

- $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{2x^2-8} = \frac{(0)}{(0)}$ Indeterminación.

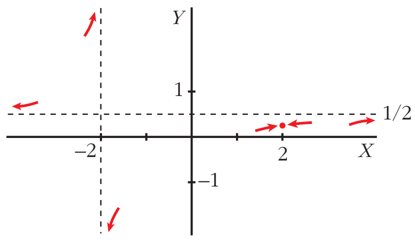
  Simplificamos la fracción: $\dfrac{x^2-2x}{2x^2-8} = \dfrac{x(x-2)}{2(x^2-4)} = \dfrac{x(x-2)}{2(x+2)(x-2)} = \dfrac{x}{2(x+2)}$

  $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{2x^2-8} = \lim_{x \to 2} \frac{x}{2(x+2)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

- $\displaystyle\lim_{x \to -2} \frac{x^2-2x}{2x^2-8} = \frac{8}{0} = \pm\infty \begin{cases} x < -2, & y \to +\infty \\ x > -2, & y \to -\infty \end{cases}$

- $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2-2x}{2x^2-8} = \frac{1}{2}$

- $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2-2x}{2x^2-8} = \frac{1}{2}$



3 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1 & \text{si } x \le 0 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Estudia su continuidad. **b) Halla $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$.**

Resolución

a) Tanto si $x < 0$ como si $x > 0$, $f(x)$ es continua, por estar definida mediante funciones continuas.

Estudiamos la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x \to 0} f(x) \begin{cases} \displaystyle\lim_{x \to 0^-} e^{-x} + 1 = 1 + 1 = 2 \\ \displaystyle\lim_{x \to 0+} -x^2 + 3x + 2 = 2 \end{cases} \to \lim_{x \to 0} f(x) = 2$$

$f(0) = e^0 + 1 = 2$

Como $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$, f es continua en $x = 0$. Luego f es continua en $\mathbb{R}$.

b) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x} + 1 = e^{(+\infty)} + 1 = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (-x^2 + 3x + 2) = -\infty$

4 **a) Calcula a y b para que f sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} -2x + a & \text{si } x \le -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

b) Representa la función obtenida.

Resolución

a) • f es continua si $x < -2$, si $-2 < x < 1$ y si $1 < x$, por estar definida por funciones continuas.

• Para que f sea continua en $x = -2$, debe cumplirse que $\lim_{x \to -2} f(x) = f(-2)$.

$f(-2) = -2(-2) + a = 4 + a$

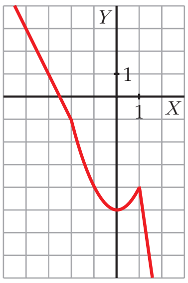
$$\lim_{x \to -2} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to -2^-} (-2x + a) = 4 + a \\ \lim_{x \to -2^+} (x^2 - 5) = 4 - 5 = -1 \end{cases} \quad \text{Por tanto, } 4 + a = -1 \rightarrow a = -5$$

• Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, debe ser $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$.

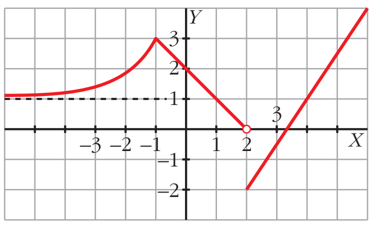
$f(1) = b \cdot 1 + 3 = b + 3$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} (x^2 - 5) = -4 \\ \lim_{x \to 1^+} (bx + 3) = b + 3 \end{cases} \quad \text{Por tanto, } b + 3 = -4 \rightarrow b = -7$$

b) $$f(x) = \begin{cases} -2x - 5 & \text{si } x \le -2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ -7x + 3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$



5 **Observa la gráfica de la función $y = f(x)$ y di el valor de los siguientes límites:**



a) $\lim_{x \to -1} f(x)$ **b)** $\lim_{x \to 2} f(x)$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ **d)** $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Resolución

a) $\lim_{x \to -1} f(x) = 3$

b) $$\lim_{x \to 2} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 2^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = -2 \end{cases} \quad f \text{ no tiene límite cuando } x \to 2$$

c) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$