18 Calcula el valor de k para que cada una de las siguientes funciones sea continua:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$ **b)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ k & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Resolución

a) • **Si $x \neq 1$**, la función es continua.

• **Si $x = 1$**:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1} (x^3 + x^2 + x + 1) = 4$$

$f(1) = k$

Para que sea continua, ha de ser $k = 4$.

b) Para $x \neq 1$, $f(x)$ es continua.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 1$, ha de ser $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} k = k \\ f(1) = k \end{array}\right\}$$

Ha de ser $k = 2$.