28 **La profundidad de la capa de arena en una playa se verá afectada por la construcción de un dique. En una zona de la playa, esa profundidad vendrá dada por la siguiente función:**

$$P(t) = \begin{cases} 2 + t^2 & \text{si } 0 \le t \le 1 \\ \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} & \text{si } t > 1 \end{cases}$$

P es la profundidad en metros y t el tiempo en años desde el inicio de la construcción.

Si la profundidad llegara a superar los 4 metros, se debería elevar la altura del paseo marítimo.

a) ¿Es $P(t)$ una función continua?

b) ¿Será necesario elevar la altura del paseo con el paso del tiempo, por causa de la profundidad de la arena?

c) Haz una gráfica aproximada de $P(t)$.

Resolución

a) Las funciones que definen $P(t)$ son continuas en el intervalo en que están definidas. Estudiamos la continuidad en $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to 1^-} P(t) = \lim\limits_{t \to 1^-} (2 + t^2) = 3 \\ \lim\limits_{t \to 1^+} P(t) = \lim\limits_{t \to 1^+} \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = 3 \end{array}\right\} \quad \lim\limits_{t \to 1} P(t) = 3 = P(1)$$

Por tanto, $P(t)$ es continua.

b) Calculamos $\lim\limits_{t \to +\infty} P(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} = 4$

Observamos que $\dfrac{8t^2 - t - 1}{2t^2} < 4$ para cualquier valor de t mayor que 1.

Por tanto, la profundidad nunca llega a superar los 4 metros y no será necesario elevar la altura del paseo.

c)