1 **Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:**

a) $y = 3x\sqrt{2x+1}$ **b)** $y = \dfrac{5}{\sqrt{x}}$ **c)** $y = \dfrac{x}{(x+2)^2}$

d) $y = \left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2$ **e)** $y = e^{2x+1}$ **f)** $y = ln\left(\dfrac{x}{3}+1\right)$

Resolución

a) $y' = 3\sqrt{2x+1} + 3x\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \dfrac{3(2x+1)+3x}{\sqrt{2x+1}} = \dfrac{9x+3}{\sqrt{2x+1}}$

b) $y' = \dfrac{-5\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \dfrac{-5}{2x\sqrt{x}}$

c) $y' = \dfrac{(x+2)^2 - x \cdot 2(x+2)}{(x+2)^4} = \dfrac{x+2-2x}{(x+2)^3} = \dfrac{-x+2}{(x+2)^3}$

d) $y' = 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\dfrac{-1(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = 2\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\dfrac{-2}{(1+x)^2} = \dfrac{-4(1-x)}{(1+x)^3}$

e) $y' = 2e^{2x+1}$

f) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{3}}{\dfrac{x}{3}+1} = \dfrac{1}{3} : \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{1}{x+3}$

2 **Aplica la definición de derivada para hallar $f'(2)$ siendo $f(x) = x^2 - 5x$.**

Resolución

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$

- $f(2+h) = (2+h)^2 - 5(2+h) = h^2 - h - 6$
- $f(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 = -6$
- $f(2+h) - f(2) = h^2 - h$
- $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \dfrac{h^2-h}{h} = h - 1$

$f'(2) = \lim\limits_{h \to 0} (h-1) = -1$

3 **Estudia la continuidad y la derivabilidad de esta función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1 & \text{si } x \le 1 \\ \dfrac{4}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

¿Existe algún punto en el que $f'(x) = 0$?

Resolución

$f(x)$ es continua si $x < 1$ y si $x > 1$ porque las funciones que la definen lo son.

Estudiamos la continuidad en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2 + 2x - 1) = 2 \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{4}{x+1} = 2 \end{cases}$$

$f(1) = 1 + 2 - 1 = 2$

Como $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2$, f es continua en $x = 1$.

Por tanto, f es continua en $\mathbb{R}$.

Hallamos $f'(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{-4}{(x+1)^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f es derivable si $x < 1$ y si $x > 1$.

Estudiamos su derivabilidad en $x = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 \\ f'(1^+) = \dfrac{-4}{(1+1)^2} = -1 \end{array}\right\} \text{Como } f'(1^-) \neq f'(1^+), \text{ no existe } f'(1).$$

f es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.

Veamos si $f'(x) = 0$ tiene solución.

$2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1$

$\dfrac{-4}{(x+1)^2} = 0$ no tiene solución.

Por tanto, $f'(x) = 0$ cuando $x = -1$.

4 **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable:** $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Representa la función para los valores de a y b que has hallado.

Resolución

Para que f sea derivable en $x = 0$ debe ser continua en ese punto.

$$\left.\lim_{x \to 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \to 0^-} (ax + b) = b \\ \lim_{x \to 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2 \end{cases}\right\} \text{Para que } \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 2, \text{ debe ser } b = 2.$$

Si $b = 2$, f es continua en $\mathbb{R}$.

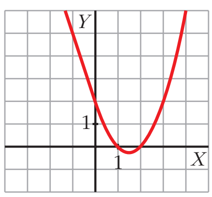
$f'(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < 0 \\ 2x - 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Veamos si f es derivable en $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = a \\ f'(0^+) = -3 \end{array}\right\} \text{Para que exista } f'(0), \text{ debe ser } a = -3.$$

Si $a = -3$, f es derivable en $\mathbb{R}$.

$f(x) = \begin{cases} -3x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



5 **¿En qué puntos no es derivable la función $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$? Justifica tu respuesta.**

Resolución

Definimos la función por intervalos. Para ello hacemos:

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \ \to\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \le 1 \\ -x^2 + 4x - 3 & \text{si } 1 < x < 3 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$$

Hallamos $f'(x)$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & \text{si } x < 1 \\ -2x + 4 & \text{si } 1 < x < 3 \\ 2x - 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

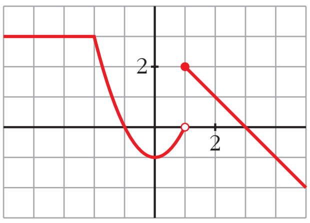
Estudiamos la derivabilidad de f en $x = 1$ y en $x = 3$:

$$\left.\begin{aligned} f'(1^-) &= 2 \cdot 1 - 4 = -2 \\ f'(1^+) &= -2 \cdot 1 + 4 = 2 \end{aligned}\right\} \text{ Como } f'(1^-) \ne f'(1^+), \text{ no existe } f'(1).$$

$$\left.\begin{aligned} f'(3^-) &= -2 \cdot 3 + 4 = -2 \\ f'(3^+) &= 2 \cdot 3 - 4 = 2 \end{aligned}\right\} \text{ Como } f'(3^-) \ne f'(3^+), \text{ no existe } f'(3).$$

f no es derivable ni en $x = 1$, ni en $x = 3$.

6 **Observando la gráfica de esta función f, estudia su derivabilidad. Halla, si existen, $f'(-4)$, $f'(0)$, $f'(3)$.**



Resolución

- f es discontinua en $x = 1$. Por tanto, no es derivable en $x = 1$.

  En $x = -2$ observamos que $f'(-2^-) \ne f'(-2^+)$: tampoco es derivable.

  Luego f es derivable en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$

- $f'(-4) = 0$ porque en ese punto la función es constante.

  $f'(0) = 0$ porque en $x = 0$ la tangente es horizontal.

  $f'(3) = -1$ porque -1 es la pendiente de la recta que pasa por $(1, 2)$ y $(3, 0)$: $m = \dfrac{2 - 0}{1 - 3} = -1$