26 **Calcula a y b para que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x & \text{si } x \le 2 \\ x^2 - bx - 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Resolución

Para que sea derivable, en primer lugar, ha de ser continua.

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ la función es continua, pues está formada por dos polinomios.
- **En $x = 2$** debe cumplirse que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (ax^2 + 3x) = 4a + 6 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} (x^2 - bx - 4) = -2b \\ f(2) = 4a + 6 \end{array}\right\}$$

Para que sea continua, ha de ser $4a + 6 = -2b$; es decir, $2a + 3 = -b$, o bien $b = -2a - 3$.

Derivabilidad:

- **Si $x \neq 2$** $\rightarrow$ la función es derivable. Además:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax + 3 & \text{si } x < 2 \\ 2x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- **En $x = 2$** debe cumplirse que $f'(2^-) = f'(2^+)$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = 4a + 3 \\ f'(2^+) = 4 - b \end{array}\right\} \text{Para que sea derivable, ha de ser } 4a + 3 = 4 - b; \text{ es decir, } b = -4a + 1.$$

Teniendo en cuenta las dos condiciones obtenidas:

$$\left.\begin{array}{l} b = -2a - 3 \\ b = -4a + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -2a - 3 = -4a + 1 \rightarrow 2a = 4 \rightarrow a = 2 \\ b = -7 \end{array}$$

Por tanto, para que $f(x)$ sea derivable en todo $\mathbb{R}$, ha de ser $a = 2$ y $b = -7$.