



29 Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x < 3 \\ -x^2 + 3x + 2 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Resolución

Continuidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$: es continua, pues está formada por funciones continuas.

En $x = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1 \\ f(0) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0). \text{ La función es continua en } x = 0.$$

En $x = 3$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (-x^2 + 3x + 2) = 2 \\ f(3) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = f(0). \\ \text{No es continua en } x = 3. \end{array}$$

La función es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$.

Derivabilidad:

Si $x \neq 0$ y $x \neq 3$. Es derivable y:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x & x < 0 \\ 0 & 0 < x < 3 \\ -2x + 3 & x > 3 \end{cases}$$

En $x = 0$:

$$f'(0^-) = 1 \neq f'(0^+) = 0 \rightarrow \text{No es derivable en } x = 0.$$

En $x = 3$: no es derivable, pues no es continua.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{0, 3\}$.