Resolución de algunos Ejercicios y Problemas: Ejercicio 33

33 Las siguientes funciones tienen algún punto donde la derivada no existe. Hállalos en cada caso:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+2}$ **c)** $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

d) $f(x) = |x-3|$ **e)** $f(x) = \left|\dfrac{4x-5}{2}\right|$ **f)** $f(x) = |x^2-2x|$

Resolución

a) $f(x) = x^{2/3}$; $Dom\ f = \mathbb{R} \;\rightarrow\; f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3} = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ no existe si $x = 0$; es decir, $f(x)$ no es derivable en $x = 0$.

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}$

$f'(x)$ no existe si $x = -2$; el dominio de $f(x)$ es $[-2, +\infty)$.

Por tanto, en los puntos en los que la función está definida, no es derivable en $x = -2$.

c) El dominio de la función es $[-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

$f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

En los puntos en los que $f(x)$ está definida, no es derivable en $x = -1$ ni en $x = 1$.

d) $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{si } x < 3 \\ x-3 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = 3$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$\left.\begin{array}{l} f'(3^-) = -1 \\ f'(3^+) = 1 \end{array}\right\}$ Son distintas.

e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-4x+5}{2} & \text{si } x < \dfrac{5}{4} \\ \dfrac{4x-5}{2} & \text{si } x \geq \dfrac{5}{4} \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 5/4 \\ 2 & \text{si } x > 5/4 \end{cases}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = \dfrac{5}{4}$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$\left.\begin{array}{l} f'(5/4^-) = -2 \\ f'(5/4^+) = 2 \end{array}\right\}$ Son distintas.

f) $f(x) = \begin{cases} x^2-2x & \text{si } x < 0 \\ -x^2+2x & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2-2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x < 0 \\ -2x+2 & \text{si } 0 < x < 2 \\ 2x-2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

$f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$; pero no es derivable en $x = 0$ ni en $x = 2$, pues sus derivadas laterales no coinciden:

$\left.\begin{array}{l} f'(0^-) = -2 \\ f'(0^+) = 2 \end{array}\right\}$ Son distintas.

$\left.\begin{array}{l} f'(2^-) = -2 \\ f'(2^+) = 2 \end{array}\right\}$ Son distintas.