1. Ejercicios de refuerzo: identificación de extremos relativos

Soluciones

1 **Hallar los extremos relativos de las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 12x$ **b)** $y = x^4 - 2x^2 - 3$ **c)** $y = (2 - x)^3$

d) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ **e)** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **f)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Resolución

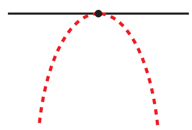
a) $y = x^3 - 12x$

$$f'(x) = 3x^2 - 12 \;\rightarrow\; f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; x = \pm 2$$

En los puntos de abscisa $x = -2$ y $x = 2$, la función puede tener máximo o mínimo relativo. Averigüémoslo.

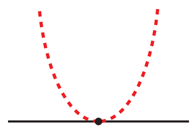
- Estudio del signo de la derivada en las cercanías del punto:

En $x_1 = -2$ $\left\langle \begin{array}{l} f'(-2{,}01) = 3 \cdot (-2{,}01)^2 - 12 = 0{,}1203 > 0 \\ f'(-1{,}99) = 3 \cdot (-1{,}99)^2 - 12 = -0{,}1197 < 0 \end{array} \right.$



La función es creciente a la izquierda de –2 y decreciente a su derecha. Por tanto, en el punto $x_1 = -2$ tiene un máximo.

En $x_2 = 2$ $\left\langle \begin{array}{l} f'(1{,}99) = -0{,}1197 < 0 \\ f'(2{,}01) = 0{,}1203 > 0 \end{array} \right.$

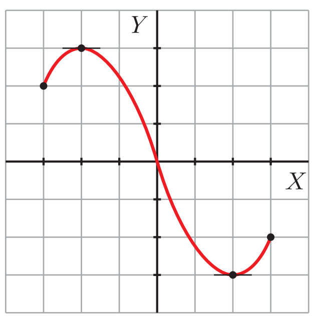


La función es decreciente a la izquierda de 2 y creciente a su derecha. Por tanto, en el punto $x_2 = 2$ tiene un mínimo.

- También podemos averiguar la naturaleza de estos puntos singulares obteniendo el valor de la función en ellos y en otros puntos intermedios:

$$f(-3) = 9 \qquad f(-2) = 16 \qquad f(0) = 0 \qquad f(2) = -16 \qquad f(3) = -9$$

Los representamos:



Para efectuar esta representación, se ha tenido en cuenta:

— La función es continua: los puntos se han unido sin cortes.

— La función es derivable: la curva se ha trazado sin picos.

— La derivada solo se anula en (–2, 16) y en (2, –16). Solo en esos puntos puede haber cambio de tendencia (crece-decrece o decrece-crece).

— Así, es obvio que en (–2, 16) hay un máximo, y en (2, –16), un mínimo.

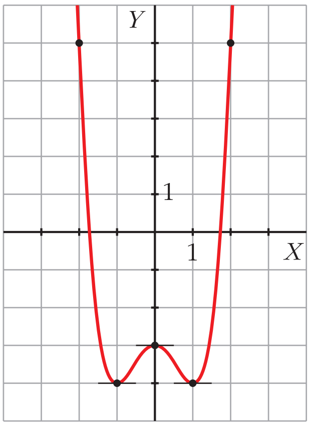
Soluciones

b) $\boldsymbol{y = x^4 - 2x^2 - 3}$

$f'(x) = 4x^3 - 4x \;\rightarrow\; f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^3 - x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1,\;\; x = 0,\;\; x = 1$

Calculamos el valor de la función en estos tres puntos y en otros dos: uno a su izquierda y otro a su derecha.

$f(-2) = 5 \qquad f(-1) = -4 \qquad f(0) = -3 \qquad f(1) = -4 \qquad f(2) = 5$



La representación permite ver que:

- En –1 hay un mínimo.
- En 0 hay un máximo.
- En 1 hay un mínimo.

También se podrían haber averiguado estos resultados estudiando el signo de $f'(x)$ en las cercanías de cada uno de estos puntos.

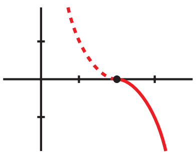
c) $\boldsymbol{y = (2 - x)^3}$

$f'(x) = 3(2 - x)^2 \cdot (-1) = -3(2 - x)^2$

$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; -3(2 - x)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 2$

- Estudio del signo de $f'(x)$ en las cercanías de $x = 2$:

$$\left.\begin{array}{l} f'(1{,}99) = 0{,}0003 < 0 \\ f'(2{,}01) = -0{,}0003 < 0 \end{array}\right\}$$

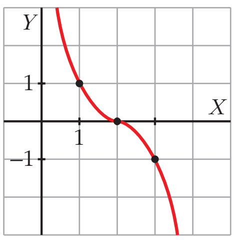


$x = 2$ es un punto de inflexión.

- Obtención de $f(x)$ en el punto y en otros próximos:

$f(1) = 1 \qquad f(2) = 0 \qquad fg(3) = -1$

Representamos la gráfica:



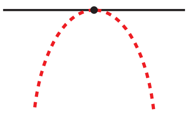
Es evidente que (2, 0) es un punto de inflexión.

Soluciones

d) $\boldsymbol{y = \dfrac{1}{1 + x^2}}$

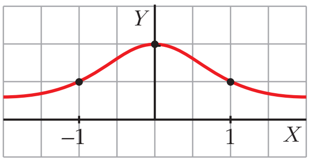
$f'(x) = \dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2}$; $f'(x) = 0 \iff x = 0$

- $\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) > 0 \\ f'(0{,}01) < 0 \end{array}\right\}$



Es un máximo.

- $f(-1) = 0{,}5$, $f(0) = 1$; $f(1) = 0{,}5$

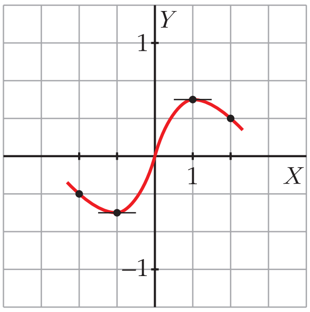


e) $\boldsymbol{y = \dfrac{x}{x^2 + 1}}$

$f'(x) = \dfrac{(x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$

$f'(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff x = \pm 1 \iff x = -1$ o $x = 1$

- $f(-2) = -0{,}4$, $f(-1) = -0{,}5$, $f(0) = 0$, $f(1) = 0{,}5$, $f(2) = 0{,}4$



La función es continua.

Tiene un mínimo relativo en (–1; –0,5) y un máximo relativo en (1; 0,5).

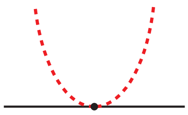
f) $\boldsymbol{y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f'(x) = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = 0$

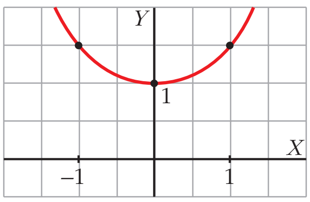
- Analizando el signo de $f'(x)$ en las proximidades de $x = 0$:

$\left.\begin{array}{l} f'(-0{,}01) = -0{,}01 < 0 \\ f'(0{,}01) = 0{,}01 > 0 \end{array}\right\}$



Es un mínimo.

- $f(-1) = 1{,}5$, $f(0) = 1$, $f(1) = 1{,}5$



Hay un mínimo en (0, 1).