Soluciones

1 **Localiza los extremos relativos y decide de qué tipo son recurriendo a la segunda derivada, en las siguientes funciones:**

a) $y = x^3 - 12x$ **b)** $x^4 - 2x^2 - 3$ **c)** $y = (2 - x)^3$

d) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ **e)** $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **f)** $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Resolución

a) $y = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12;\ f'(x) = 0 \iff x = -2$ o $x = 2$

$f''(x) = 6x \qquad f''(-2) = -12 < 0 \to$ Hay un máximo en $x = -2$.

$f''(2) = 12 > 0 \to$ Hay un mínimo en $x = 2$.

b) $x^4 - 2x^2 - 3$

$f'(x) = 4x^3 - 4x;\ f'(x) = 0 \iff x = -1,\ x = 0,\ x = 1$

$f''(x) = 12x^2 - 4 \qquad f''(-1) > 0 \Rightarrow$ Hay un mínimo en $x = -1$.

$f''(0) < 0 \Rightarrow$ Hay un máximo en $x = 0$.

$f''(1) > 0 \Rightarrow$ Hay un mínimo en $x = 1$.

c) $y = (2 - x)^3$

$f'(x) = -3(2 - x)^2;\ f'(x) = 0 \iff x = 2$

$f''(x) = -6(2 - x)(-1) = 6(2 - x);\ f''(2) = 0$

$f'''(x) = 6 \cdot (-1) = -6;\ f'''(2) = -6 \neq 0$

En $x = 2$ hay un punto de inflexión.

d) $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(1 + x^2)^2};\ f'(x) = 0 \iff x = 0$

$$f''(x) = \frac{-2(1 + x^2)^2 - (-2x)\, 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2(1 + x^2) + 4x^2 \cdot 2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3}$$

$f''(0) = -2 < 0 \to$ Hay un máximo en $x = 0$.

e) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

$f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2};\ f'(x) = 0 \iff x = -1$ o $x = 1$

$$f''(x) = \frac{-2x(1 + x^2)^2 - (1 - x^2)\, 2(1 + x^2) \cdot 2x}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2x(1 + x^2) - (1 - x^2)\, 4x}{(1 + x^2)^3} = \frac{2x^3 - 6x}{(1 + x^2)^3}$$

$f''(-1) > 0 \to$ Hay un mínimo en $x = -1$.

$f''(1) < 0 \to$ Hay un máximo en $x = 1$.

Soluciones

f) $\boldsymbol{y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}}$

$f'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$; $f'(x) = 0 \iff x = 0$

$f''(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$; $f''(0) = 1 > 0 \to$ Hay un mínimo en $x = 0$.

2 **Estudia la concavidad, la convexidad y los puntos de inflexión de las siguientes funciones:**

a) $\boldsymbol{y = x^3 - 3x}$ **b)** $\boldsymbol{y = x^3 - 3x^2 + 4x}$ **c)** $\boldsymbol{y = x^4 - 4x^3}$ **d)** $\boldsymbol{y = 1 - (x - 1)^3}$

Resolución

a) $\boldsymbol{y = x^3 - 3x}$

$f'(x) = 3x^2 - 3$; $f''(x) = 6x$; $f''(x) = 0 \iff x = 0$

$x < 0$	0	$x > 0$
$f''(x) < 0$		$f''(x) > 0$
CONVEXA		CÓNCAVA

$x < 0 \to$ CONVEXA

$x = 0 \to$ INFLEXIÓN

$x > 0 \to$ CÓNCAVA

b) $\boldsymbol{y = x^3 - 3x^2 + 4x}$

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$; $f''(x) = 6x - 6$; $f''(x) = 0 \iff x = 1$

$x < 1$	1	$x > 1$
$f''(x) < 0$		$f''(x) > 0$
CONVEXA		CÓNCAVA

$x < 1 \to$ CONVEXA

$x = 1 \to$ INFLEXIÓN

$x > 1 \to$ CÓNCAVA

c) $\boldsymbol{y = x^4 - 4x^3}$

$f'(x = 4x^3 - 12x^2$; $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$; $f''(x) = 0 \iff x = 0$ o $x = 2$

$x < 0$	0	$0 < x < 2$	2	$x > 2$
$f''(x) > 0$		$f''(x) < 0$		$f''(x) > 0$
CÓNCAVA		CONVEXA		CÓNCAVA

$x < 0 \to$ CÓNCAVA

$x = 0 \to$ INFLEXIÓN

$0 < x < 2 \to$ CONVEXA

$x = 2 \to$ INFLEXIÓN

$x > 2 \to$ CÓNCAVA

d) $\boldsymbol{y = 1 - (x - 1)^3}$

$f'(x) = -3(x - 1)^2$; $f''(x) = -6(x - 1)$; $f''(x) = 0 \iff x = 1$

$x < 1$	1	$x > 1$
$f''(x) > 0$		$f''(x) < 0$
CÓNCAVA		CONVEXA

$x < 1 \to$ CÓNCAVA

$x = 1 \to$ INFLEXIÓN

$x > 1 \to$ CONVEXA